

14-15 Преобразование соединения треугольником сопротивлений в эквивалентное соединение звездой и обратно

Во многих схемах электрических цепей можно выделить группы из трех резисторов, образующих треугольник или звезду сопротивлений.

В схеме электрической цепи (рис. 4.8, *a*) нет резисторов, соединенных последовательно или параллельно, но к узлам 1, 2, 3 присоединен треугольник резисторов R_{12} , R_{23} , R_{31} , а к узлам 2, 4, 3 – треугольник R_{24} , R_{43} , R_{32} .

Замена одного из треугольников звездой, как показано на рисунке 4.8, *б*, позволяет получить схему со смешанным соединением приемников. Резисторы R_2 и R_{24} , а также R_3 и R_{23} соединены последовательно и их можно заменить эквивалентными, которые в свою очередь соединены параллельно. В итоге схема преобразуется в простейшую (рис. 4.8, *в*).

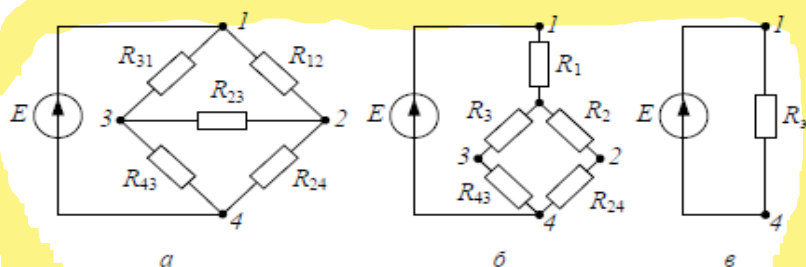


Рис. 4.8. Упрощение схемы преобразованием соединения треугольником в соединение звездой

Рассмотрим фрагмент схемы (рис. 4.9, *a*), в которой между узлами 1, 2, 3 включены три сопротивления R_{23} , R_{31} , R_{12} , соединенные треугольником, а на рисунке 4.9, *б* между этими же узлами включены три сопротивления R_1 , R_2 , R_3 , соединенные звездой, и выведем уравнения преобразования этих схем.

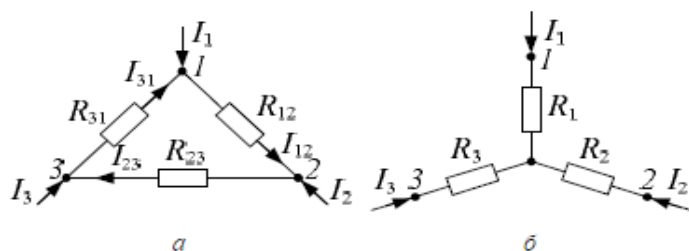


Рис. 4.9. Схемы соединения приемников: *a* – треугольником; *б* – звездой

Соединения треугольником и звездой, изображенные на рисунке 4.9, эквивалентны друг другу при условии, что внешние напряжения U_{12} , U_{23} , U_{31} (между точками 1, 2, 3) и токи I_1 , I_2 , I_3 , подходящие к этим точкам, одинаковы в обоих случаях.

По второму закону Кирхгофа сумма напряжений в контуре треугольника равна нулю:

$$I_{12}R_{12} + I_{23}R_{23} + I_{31}R_{31} = 0. \quad (4.20)$$

По первому закону Кирхгофа для узлов 2 и 1 выразим токи:

$$I_{23} = I_{12} + I_2; \quad I_{31} = I_{12} - I_1$$

и, подставив в выражение (4.20), определим ток

$$I_{12} = \frac{I_1 R_{31} - I_2 R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Напряжение между узлами 1 и 2 треугольника (рис. 4.9, а)

$$U_{12} = I_{12}R_{12} = \frac{I_1 R_{12} R_{31} - I_2 R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Такое же напряжение в схеме, приведенной на рисунке 4.9, б:

$$U_{12} = I_1 R_1 - I_2 R_2.$$

Для выполнения условия эквивалентности необходимо равенство напряжений U_{12} в обеих схемах при любых токах I_1 и I_2 , т. е.

$$I_1 \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} - I_2 \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = I_1 R_1 - I_2 R_2. \quad (4.21)$$

Равенство (4.21) должно выполняться, если равны коэффициенты при токах I_1 и I_2 . Значит, получаем уравнения для определения сопротивлений искомой эквивалентной звезды через заданные сопротивления треугольника:

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (4.22)$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (4.23)$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (4.24)$$

Выражение (4.24) получается по аналогии с предыдущими в результате круговой замены индексов.

Таким образом, *сопротивление луча звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений трех сторон треугольника.*

На рисунке 4.10 приведен пример, когда замена части схемы с соединением приемников звездой позволяет преобразовать сложную электрическую схему в схему со смешанным соединением приемников.

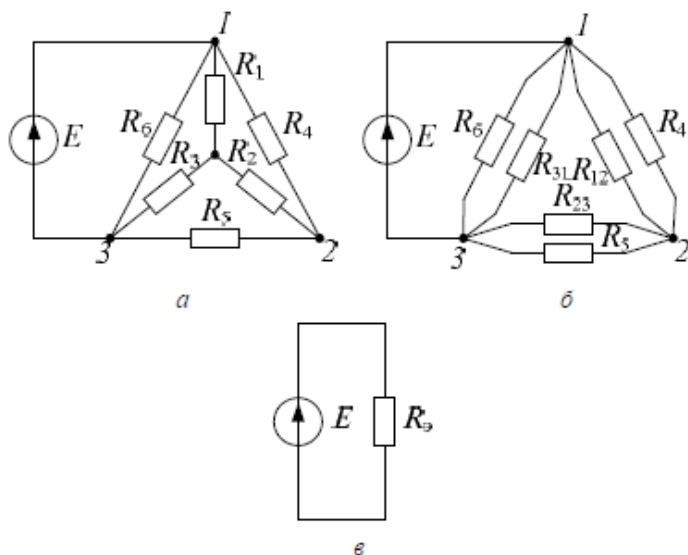


Рис. 4.10. Упрощение схемы преобразованием соединения звездой в соединении треугольником

После преобразования трех сопротивлений исходной схемы R_1 , R_2 , R_3 , соединенных звездой (рис. 4.10, а) в эквивалентный треугольник, получается схема (рис. 4.10, б), которую можно упростить. Парно сопротивления R_{12} и R_4 , R_{23} и R_5 , R_{31} и R_6 соединены параллельно. После их замены эквивалентными сопротивлениями

получается схема с последовательным соединением (R_{124} и R_{235}) и параллельно присоединенным к ней сопротивлением R_{316} . В итоге схема приводится к простейшей (рис. 4.10, в).

Выражения для искоемых сопротивлений треугольника R_{12} , R_{23} , R_{31} через заданные сопротивления звезды R_1 , R_2 , R_3 можно найти в результате совместного решения уравнений (4.22)–(4.24):

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3};$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1};$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}.$$

Следовательно, при эквивалентном преобразовании соединения звездой в соединение треугольником сопротивление стороны треугольника равно сумме сопротивлений прилегающих лучей звезды и их произведения, деленного на сопротивление третьего луча.

Численный пример решения задачи по рисунку 4.8

$E = 660 \text{ В}$; $R_{12} = 30 \text{ Ом}$; $R_{23} = 50 \text{ Ом}$; $R_{31} = 20 \text{ Ом}$; $R_{24} = 20 \text{ Ом}$; $R_{43} = 5 \text{ Ом}$.

Преобразуем верхний треугольник сопротивлений в звезду

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{30 \cdot 20}{30 + 50 + 20} = 6 \text{ Ом}.$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{30 \cdot 50}{30 + 50 + 20} = 15 \text{ Ом}.$$

$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{50 \cdot 20}{30 + 50 + 20} = 10 \text{ Ом}.$$

Получаем схему среднего рисунка 4.8 б.

Определяем эквивалентное сопротивление

$$R_3 = R_1 + \frac{(R_2 + R_{24}) \cdot (R_3 + R_{43})}{R_2 + R_{24} + R_3 + R_{43}} = 6 + \frac{(15 + 20) \cdot (10 + 5)}{15 + 20 + 10 + 5} = 16,5 \text{ Ом}.$$

Получаем схему правого рисунка 4.8 в.

Определяем ток источника $I = E / R_3 = 660 / 16,5 = 40 \text{ А}$.

Токи в нижних резисторах определяем по формулам разброса

$$I_{43} = I \frac{R_2 + R_{24}}{R_2 + R_{24} + R_3 + R_{43}} = 40 \frac{15 + 20}{15 + 20 + 10 + 5} = 28 \text{ А}$$

$$I_{24} = I \cdot \frac{R_3 + R_{43}}{R_2 + R_{24} + R_3 + R_{43}} = 40 \frac{10 + 5}{15 + 20 + 10 + 5} = 12 \text{ А}$$

Возвращаемся к исходной схеме рисунка 4.8 а. Находим токи в верхних резисторах используя закон Ома и второй закон Кирхгофа

$$I_{31} = \frac{U_{13}}{R_{31}} = \frac{E - I_{43} \cdot R_{43}}{R_{31}} = \frac{660 - 28 \cdot 5}{20} = 26 \text{ А} .$$

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{E - I_{24} \cdot R_{24}}{R_{12}} = \frac{660 - 12 \cdot 20}{30} = 14 \text{ А} .$$

Находим ток в среднем резисторе $I_{23} = I_{31} - I_{43} = 26 - 28 = -2 \text{ А}$.

Знак «-» показывает что ток в среднем резисторе течёт справа налево.