20-21 Метод узлового напряжения (метод двух узлов)

Методом узловых потенциалов для расчета токов в ветвях сложной электрической цепи целесообразно воспользоваться, если в электрической цепи независимых контуров больше количества узлов -1.

Ток в любой ветви схемы можно найти по закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Однако для этого необходимо знать потенциалы узлов схемы.

Метод расчета электрических цепей, в котором за неизвестные принимают потенциалы узлов схемы, называют *методом узловых потенциалов*.

Рассмотрим преимущества метода узловых потенциалов на примере

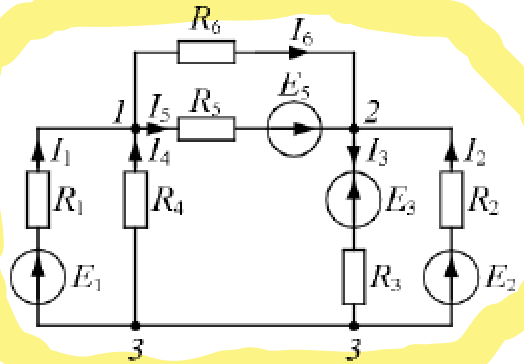

Рис. 4.15. Схема цепи для иллюстрации метода узловых потенциалов

В данной схеме три узла. Так как любая одна точка схемы может быть заземлена без изменения токораспределения в схеме, то потенциал одного этого узла можно принять равным нулю. Допустим $\varphi_3 = 0$. Тогда число неизвестных потенциалов узлов сократилось на единицу.

Составим уравнения для первого и второго узлов по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 + I_4 - I_5 - I_6 = 0;$$

$$I_5 + I_6 + I_2 - I_3 = 0.$$

Токи в ветвях на основании закона Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = (-\varphi_1 + E_1)g_1; \; I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = (-\varphi_2 + E_2)g_2;$$

$$I_3 = (\varphi_2 - E_3)g_3; \;\; I_4 = -\varphi_1 g_4; \;\; I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_5}{R_5} = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_5)g_5;$$

$$I_6 = (\varphi_1 - \varphi_2)g_6.$$

Подставляем значения токов в уравнения, составленные по первому закону Кирхгофа.

Для узла 1:

$$(-\varphi_1 + E_1)g_1 - \varphi_1 g_4 - (\varphi_1 - \varphi_2 + E_5)g_5 - (\varphi_1 - \varphi_2)g_6 = 0.$$

Для узла 2:

$$(\varphi_1 - \varphi_2 + E_5)g_5 + (\varphi_1 - \varphi_2)g_6 + (-\varphi_1 + E_2)g_2 - (\varphi_2 - E_3)g_3 = 0.$$

После преобразований получим систему уравнений:

$$\varphi_1(g_1 + g_4 + g_5 + g_6) - \varphi_2(g_5 + g_6) = E_1 g_1 - E_5 g_5;$$
$$-\varphi_1(g_5 + g_6) + \varphi_1(g_2 + g_3 + g_5 + g_6) = E_5 g_5 + E_2 g_2 + E_3 g_3.$$

Введем обозначения:

$g_{11} = g_1 + g_4 + g_5 + g_6$ – сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в узле *1*;

$g_{22} = g_5 + g_6 + g_2 + g_3$ – сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в узле *2*;

$g_{12} = g_{21} = g_5 + g_6$ – сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы *1* и *2*.

Если между какими-либо узлами нет ветвей, то соответствующая проводимость равна нулю.

I_{11}, I_{22} – узловые токи узлов *1* и *2*, равные алгебраической сумме токов, полученных от умножения ЭДС ветвей, подходящих к соответствующему узлу, на проводимости данных ветвей.

ЭДС, направленная к узлу, принимается со знаком «+», от узла – со знаком «–».

С учётом введённых обозначений получим систему в каноническом виде

$$\varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} = I_{11};$$
$$-\varphi_1 g_{21} + \varphi_2 g_{22} = I_{22}.$$

Решив систему, найдём потенциалы узлов, а затем по закону Ома – токи.

Метод двух узлов

Распространены электрические схемы, содержащие всего два узла (рис. 4.17). В таком случае наиболее рациональным методом расчета токов в них является метод двух узлов. Под *методом двух узлов* понимают метод расчета электрических цепей, в котором за искомое принимают напряжение между двумя узлами схемы, с помощью которого потом определяют токи ветвей.

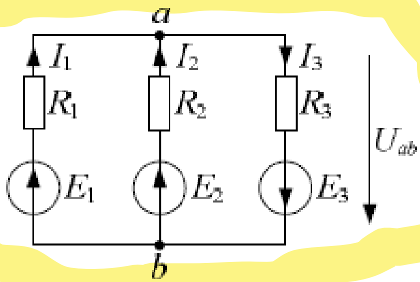

Рис. 4.17. Схема электрической цепи с двумя узлами

Чтобы получить расчетную формулу для применения метода двух узлов, в схеме электрической цепи (см. рис. 4.17) определим напряжение между двумя узлами U_{ab}. Воспользуемся методом узловых потенциалов. Примем $\varphi_b = 0$, тогда уравнение для узла a будет иметь следующий вид:

$$\varphi_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=E_1\frac{1}{R_1}+E_2\frac{1}{R_2}-E_3\frac{1}{R_3},$$

или

$$\varphi_a(g_1+g_2+g_3)=E_1g_1+E_2g_2-E_3g_3.$$

Так как $U_{ab}=\varphi_a-\varphi_b=\varphi_a$, то напряжение

$$U_{ab}=\frac{E_1g_1+E_2g_2-E_3g_3}{g_1+g_2+g_3}.$$

В общем случае

$$U_{ab}=\frac{\sum E_kg_k}{\sum g_k}. \qquad (4.33)$$

Если в схеме присутствует ветвь с источником тока J_k, то расчетная формула метода двух узлов

$$U_{ab}=\frac{\sum E_kg_k \pm J_k}{\sum g_k}. \qquad (4.34)$$

Значения E_k и J_k подставляют в формулы положительными, если их направления в ветвях противоположны направлению напряжения U_{ab}, и отрицательными, если совпадают. Если в какой-либо ветви схемы ЭДС будет отсутствовать, то соответствующее слагаемое в числителе расчетной формулы исключается, но проводимость этой ветви в знаменателе остается.

Расчет цепи методом двух узлов осуществляют в такой последовательности. Задают условное положительное направление напряжения между двумя узлами и рассчитывают его, используя расчетную формулу (4.33) или (4.34). Затем задают положительные направления токов в ветвях и обозначают их на схеме. По закону Ома для участка цепи с ЭДС определяют токи в ветвях:

$$I_k=\frac{\pm U_{ab}\pm E_k}{R_k}=(\pm U_{ab}\pm E_k)g_k.$$

При этом U_{ab} и E_k принимают положительными, если их направления в схеме совпадают с принятым направлением искомого тока I_k.

Так, для цепи (рис. 4.17) уравнения для определения токов в ветвях имеют следующий вид:

$$I_1 = \frac{-U_{ab} + E_1}{R_1}; \quad I_2 = \frac{-U_{ab} + E_2}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{ab} + E_3}{R_3}.$$

Результаты расчета токов проверяют по первому закону Кирхгофа.

Пример 4.5. Определить токи в ветвях электрической цепи (рис. 4.18), если E_1 = 8 В, E_3 = 3 В, $R_1 = R_3$ = 2 Ом, R_2 = 4 Ом.

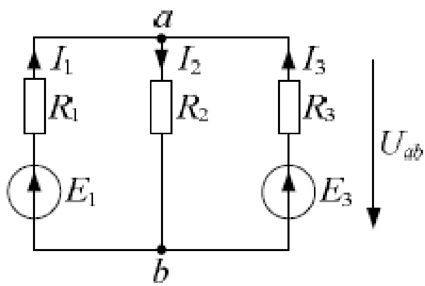

Рис. 4.18

Решение. Задачу решаем методом двух узлов.

Зададим положительное направление напряжения между узлами U_{ab} и обозначим его на схеме. Используя расчетную формулу (4.33) метода двух узлов, определяем напряжение:

$$U_{ab} = \frac{E_1 \dfrac{1}{R_1} + E_3 \dfrac{1}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{8 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}} = 4,4 \text{ В}.$$

Приняв произвольно направления токов в ветвях (рис. 4.18), определим их значения, используя закон Ома:

$$I_1 = \frac{-U_{ab} + E_1}{R_1} = \frac{-4,4 + 8}{2} = 1,8 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{4,4}{4} = 1,1 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{-U_{ab} + E_3}{R_3} = \frac{-4,4+3}{2} = -0,7 \text{ А.}$$

Результаты расчета проверим по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0, \text{ или } 1,8 - 1,1 - 0,7 = 0.$$

Значит, расчет выполнен верно. Поскольку ток I_3 имеет отрицательное значение, то его истинное направление противоположно указанному на рисунке 4.18. Следовательно, источник ЭДС с E_3 является потребителем электрической энергии.

Пример 4.6. Определить токи в ветвях электрической цепи (рис. 4.19) методом двух узлов, если $E_1 = 10$ В, $E_2 = 2$ В, $J = 3$ А, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом.

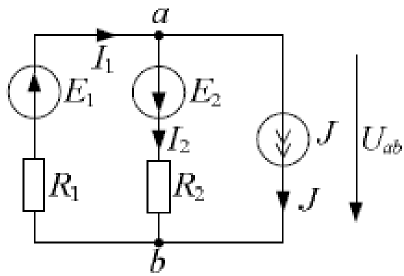

Рис. 4.19

Решение. Задаем условные положительные направления токов и напряжения между узлами a, b и обозначаем их на схеме.

Определяем напряжение между двумя узлами по формуле (4.34):

$$U_{ab} = \frac{E_1 g_1 - E_2 g_2 - J}{g_1 + g_2} = \frac{10 \cdot 1 - 2 \cdot 0,5 - 3}{1 + 0,5} = 4 \text{ В,}$$

где $g_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{1} = 1$ См; $g_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} = 0,5$ См.

Определяем токи в ветвях согласно формулам:

$$I_1 = \frac{-U_{ab} + E_1}{R_1} = \frac{-4+10}{1} = 6 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{U_{ab} + E_2}{R_2} = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ А.}$$

Проверка по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 - I_2 - J = 6 - 3 - 3 = 0.$$