33-34 Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Энергия электрического поля

2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ИХ РАСЧЕТ

2.1. Электрическая емкость. Конденсаторы

Если к двум электродам (проводникам), разделенным диэлектриком, приложить постоянное электрическое напряжение U, то электроды приобретут одинаковые по величине и противоположные по знаку электрические заряды. Абсолютная величина заряда q на каждом из электродов пропорциональна напряжению U:

$$q = CU, \tag{2.1}$$

где C – электрическая емкость.

Единица измерения электрической емкости $[C]$ – фарад (Ф).

Электрическая емкость электродов, разделенных диэлектриком, зависит от размеров и формы электродов, расстояния между ними, от свойств диэлектрика и не зависит ни от электрического заряда q, ни от напряжения U (за исключением использования диэлектриков, изменяющих диэлектрическую проницаемость при изменении напряженности E электрического поля).

Электрическую емкость подобных систем приходится определять и учитывать при проектировании и расчетах электротехнических и радиотехнических устройств и установок. В электротехнике и радиотехнике широко применяют устройства, специально созданные для использования их электрической емкости, которые называют *электрическими конденсаторами*. Графическое изображение конденсатора в схеме электрической цепи показано на рисунке 2.5.

Фарад – очень крупная единица емкости, поэтому в практических расчетах емкость C измеряется в более мелких единицах – микро- и пикофарадах:

$$1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}; 1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}.$$

2.2. Поле и электрическая емкость плоского конденсатора

Плоский конденсатор имеет две металлические пластины, разделенные диэлектриком (рис. 2.1).

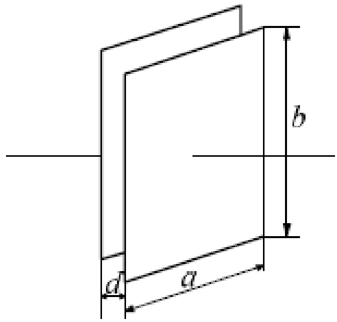

Рис. 2.1. Плоский конденсатор

Расстояние между пластинами обычно мало по сравнению с их длиной и шириной, т. е. $d << a$ и $d << b$. Если на пластины подать напряжение, то почти все свободные заряды пластин практически равномерно распределятся по внутренним, обращенным друг к другу поверхностям пластин. Искажением поля по краям пластин можно пренебречь. В пространстве между пластинами поле можно считать равномерным, т. е. вектор электрического смещения $\bar{D}$ постоянен по величине и направлен по нормали к поверхности пластин (рис. 2.2).

Полем с внешней стороны пластин в связи с малой плотностью электрических зарядов пренебрегаем.

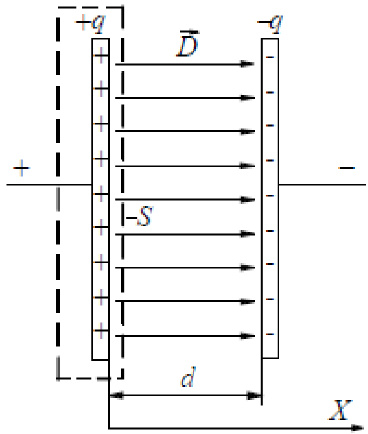

Рис. 2.2. Поле плоского конденсатора

Охватим заряд q одной из пластин замкнутой поверхностью. След этой поверхности показан на рисунке 2.2 штрихами. Одна сторона этой поверхности идет внутри конденсатора параллельно пластинам.

В соответствии с теоремой Гаусса поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность S

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q.$$

Поле практически имеется только в пространстве между пластинами, причем векторы $\vec{D}$ и $d\vec{S}$ совпадают по направлению и величина электрического смещения $\vec{D}$ во всех точках поля одинакова, поэтому

$$\oint_S \vec{D}dS = DS = q,$$

где $S = ab$ – площадь поверхности пластины.

Следовательно, $D = \dfrac{q}{S}$, а напряженность электрического поля при однородном и изотропном диэлектрике по выражению (1.3)

$$E = \frac{q}{\varepsilon_а S}.$$

Для нахождения электрической емкости C конденсатора напряжение U между пластинами выразим через заряд q. Так как поле между пластинами равномерное, то по уравнению (1.2)

$$U = Ed = \frac{q}{\varepsilon_а S}d.$$

Электрическая емкость конденсатора $C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{q\varepsilon_а S}{qd}$.

В окончательном виде

$$C = \varepsilon_а \frac{S}{d}. \qquad (2.2)$$

Как видно из уравнения (2.2), емкость C зависит от геометрических размеров пластин, их взаимного расположения, электрических свойств диэлектрика.

Увеличения емкости можно достигать увеличением поверхности пластин S, выбором диэлектрика с высокой относительной диэлектрической проницаемостью ε_r и уменьшением расстояния между пластинами d. Однако уменьшение расстояния d ограничено электрической прочностью диэлектрика, с уменьшением d увеличивается напряженность:

$$E = \frac{U}{d}.$$

Любой диэлектрик при определенной напряженности электрического поля пробивается.

Пример 2.1. Между одной из пластин плоского конденсатора и наполнителем (парафином) образовался слой воздуха (рис. 2.3).

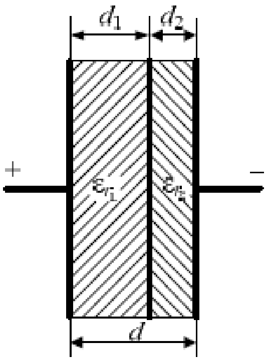

Рис. 2.3. Плоский конденсатор с двумя слоями диэлектрика

Площадь поверхности пластины конденсатора $S = 200$ см^2, толщина слоя парафина $d_1 = 0{,}5$ см, толщина воздушного слоя $d_2 = 0{,}1$ см, относительная диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon_{r_1} = 2$, воздуха $\varepsilon_{r_2} = 1$.

Пробивные напряженности для парафина и для воздуха соответственно равны:

$$E_{\text{пр}_1} = 150\ \frac{\text{кВ}}{\text{см}};\ \ E_{\text{пр}_2} = 30\ \frac{\text{кВ}}{\text{см}}.$$

Определить, при каком напряжении этот конденсатор будет пробит, какое напряжение выдержит конденсатор без дефекта (расстояние между пластинами $d = 0{,}6$ см).

Решение. Для двухслойного плоского конденсатора напряжение между пластинами

$$U = d_1E_1 + d_2E_2.$$

Электрическое смещение $D = \dfrac{q}{S}$ не зависит от свойств диэлектрика.

Напряженности

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}, \quad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}},$$

т. е. напряженность будет больше в слое воздуха.

Выразим:

$$D = \varepsilon_0\varepsilon_{r_2}E_2; \quad E_1 = \frac{E_2\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}.$$

Для определения напряжения, при котором конденсатор будет пробит, запишем:

$$U = d_1\frac{E_2\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}} + d_2E_2;$$

$$U = 0{,}5\frac{30\cdot 1}{2} + 0{,}1\cdot 30 = 7{,}5 + 3 = 10{,}5 \text{ кВ}.$$

Конденсатор без дефекта выдержит напряжение

$$U = dE_1 = 0{,}6\cdot 150 = 90 \text{ кВ}.$$

2.3. Поле и электрическая емкость цилиндрического конденсатора

Цилиндрический конденсатор представляет собой два разделенных изоляцией проводящих цилиндра с совпадающими осями, т. е. соосных или коаксиальных (рис. 2.4, *а*). Примером цилиндрического конденсатора может служить коаксиальный кабель, у которого внутренний провод прокладывается строго по оси кабеля, а другой в виде металлической оплетки охватывает изоляцию центрального проводника. Коаксиальные кабели предназначены для передачи электроэнергии высокой частоты.

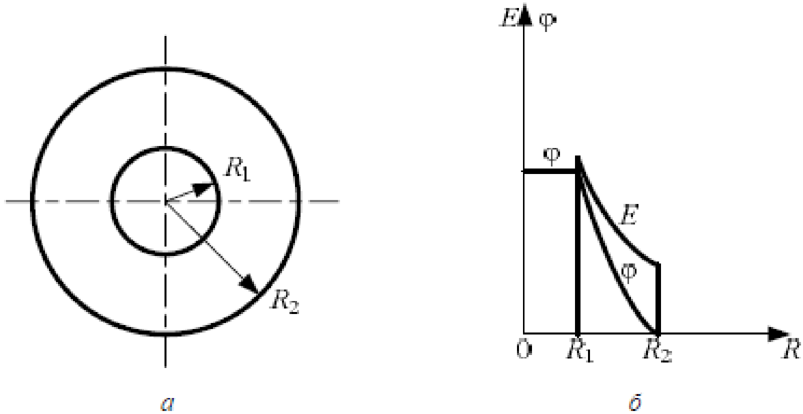

Рис. 2.4. Цилиндрический конденсатор (*а*), напряженность E и потенциал φ поля конденсатора в зависимости от R (*б*)

Пусть внутренний цилиндр радиусом R_1 имеет на единицу длины заряд $+\tau$, а внешний цилиндр радиусом R_2 – заряд $-\tau$.

Поле зарядов, имеющихся на цилиндрической поверхности внутреннего проводника, можно заменить полем зарядов, расположенных на оси кабеля. Так как длина кабеля велика по сравнению с его диаметром, то применимы уравнения (1.7), (1.8) (см. п. 1.12).

Напряженность электрического поля между проводящими цилиндрами на расстоянии R от оси кабеля по уравнению (1.8)

$$E = \frac{\tau}{2\pi R\varepsilon_a}.$$

Напряжение между цилиндрами определяется интегралом:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E\,dR = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{R_2}{R_1}. \qquad (2.3)$$

Электрическая емкость цилиндрического конденсатора и коаксиального кабеля на единицу длины

$$C = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}. \qquad (2.4)$$

На рисунке 2.4, *б* показаны графики изменения потенциала φ и напряженности E в зависимости от расстояния R от оси кабеля. Потенциал на поверхности наружного проводника принят равным нулю. При $R < R_1$ в проводящем внутреннем цилиндре $\varphi = \text{const} = U$, $E = 0$. При $R > R_2$ напряженность $E = 0$ согласно теореме Гаусса.

Наибольшее значение напряженность поля имеет у поверхности внутреннего цилиндра ($R = R_1$):

$$E_{max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} R_1,$$

или, выражая τ из формулы (2.3) через U, получаем

$$E_{max} = \frac{U}{R_1 \ln\frac{R_2}{R_1}}. \qquad (2.5)$$

Пример 2.2. Цилиндрический воздушный конденсатор длиной l = = 20 см, радиусом внутреннего цилиндра R_1 = 0,5 см и внешнего R_2 = 2,5 см включен под напряжение 20 кВ. Определить емкость конденсатора, заряд конденсатора, максимальную и минимальную напряженности электрического поля.

Решение. Электрическую емкость цилиндрического конденсатора длиной l находим по выражению (2.4):

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_a l}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\cdot 3,14\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 0,2}{\ln\frac{2,5}{0,5}} = 6,94\cdot 10^{-12}\ \text{Ф}.$$

Заряд конденсатора $q = CU = 6,94 \cdot 10^{-12} \cdot 20 \cdot 10^3 = 138,9 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Заряд конденсатора на единицу длины

$$\tau = \frac{q}{l} = \frac{138,9\cdot 10^{-9}}{0,2} = 694,7\cdot 10^{-9}\ \text{Кл/м}.$$

Максимальная напряженность поля на поверхности внутреннего цилиндра

$$E_{max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{694,7\cdot 10^{-9}}{2\cdot 3,14\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 0,5\cdot 10^{-2}} = 25\cdot 10^5\ \text{В/м}.$$

Минимальная напряженность поля у поверхности внешнего цилиндра

$$E_{min} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R_2} = 5\cdot 10^5\ \text{В/м}.$$

Пример 2.3. Коаксиальный кабель имеет радиус внутренней жилы R_1 = 2 мм и внешней оболочки R_2 = 5 мм. Определить, под какое напряжение можно включить кабель, если максимальная напряженность поля не должна превышать 1/3 пробивной напряженности $E_{пр}$ диэлектрика, равной $2 \cdot 10^4$ кВ/м.

Решение. Напряженность поля максимальна на поверхности внутреннего цилиндра. По уравнению (2.5)

$$E_{max} = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

По условию $E_{max} = \frac{E_{пр}}{3}$.

Выражаем $U = \frac{E_{пр}}{3} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$. Подставляем значения величин и получаем U =12,2 кВ.

2.4. Энергия и плотность энергии электрического поля

Система заряженных тел является носителем определенного запаса энергии. Эта энергия сообщается системе внешними источниками в процессе образования зарядов и может быть вновь возвращена источникам или преобразована в другие виды энергии при уменьшении зарядов.

Для получения выражения энергии, запасенной в системе заряженных проводящих тел, рассмотрим работу, совершаемую внешними источниками при образовании зарядов системы.

Пусть конденсатор с емкостью C через резистор с сопротивлением R подключен к источнику энергии. Часть элементарной работы, производимой источником энергии при увеличении заряда конденсатора на dq, равна $u_C dq$. Эта работа идет на создание запаса энергии в электрическом поле конденсатора, обозначим ее $dW_э$:

$$dW_э = u_C dq.$$

Для конденсаторов с диэлектриком, у которого диэлектрическая проницаемость ε_r = const, имеем соотношение $q = Cu_C$. Следовательно, $dq = Cdu_C$, поэтому энергию, запасенную в электрическом поле конденсатора, при изменении напряжения на конденсаторе от 0 до U_C найдем из выражения

$$W_э = \int_0^{U_C} C u_C du_C = \frac{CU_C^2}{2}. \tag{2.6}$$

Каждая единица объема диэлектрика, который помещен между электродами конденсатора, является носителем определенного запаса энергии, поэтому можно говорить об объемной плотности энергии электрического поля:

$$\frac{W_э}{V} = \frac{CU^2}{2V},$$

где V – объем диэлектрика, в котором заключена электрическая энергия $W_э$.

Энергия электрического поля измеряется в джоулях (Дж), а *объемная плотность энергии* – в джоулях на кубический метр (Дж/м^3).

Объемную плотность энергии электрического поля рассмотрим на примере плоского конденсатора.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_а \frac{S}{d},$$

где S – поверхность пластины,

d – расстояние между пластинами.

Поле между пластинами равномерное, поэтому $U_C = Ed$. Используем эти соотношения в уравнении (2.6) и получим

$$W_э = \varepsilon_а \frac{SE^2 d}{2} = \varepsilon_а \frac{E^2 V}{2},$$

где $V = Sd$ – объем диэлектрика, в котором сосредоточено электрическое поле.

Энергия, отнесенная к единице объема поля,

$$\frac{W_э}{V} = \varepsilon_а \frac{E^2}{2} = \frac{DE}{2}, \tag{2.7}$$

где $D = \varepsilon_а E$.