18-19 Метод контурных токов

Сущность метода состоит в том, что за неизвестные принимают условные токи, которые как бы циркулируют в контурах схемы.

Число неизвестных в этом методе равно числу уравнений, которые необходимо было бы составить по второму закону Кирхгофа, т. е. число неизвестных равно числу независимых контуров. Значит, метод контурных токов более экономичен (меньше уравнений по сравнению с методом уравнений Кирхгофа).

Для вывода основных уравнений метода рассмотрим схему цепи (рис. 4.12).

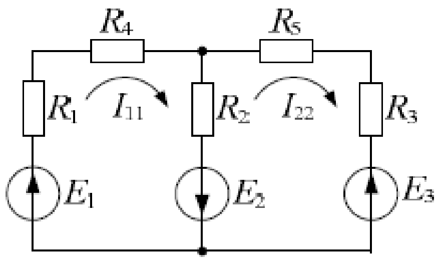

Рис. 4.12. Схема цепи для иллюстрации метода контурных токов

В данной схеме два независимых контура. Полагаем, что в каждом независимом контуре течет свой контурный ток I_{11} и I_{22}. Задав их направления и направление обхода контуров (обычно по часовой стрелке), составим по второму закону Кирхгофа уравнения для независимых контуров, учитывая, что по смежной ветви (с сопротивлением R_2) течет сверху вниз ток I_{11}, а снизу вверх ток I_{22}. Поэтому фактически через R_2 течет ток $I_{11} - I_{22}$:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_4) + (I_{11} - I_{22})R_2 = E_1 + E_2; \\ -(I_{11} - I_{22})R_2 + I_{22}(R_3 + R_5) = -E_2 - E_3. \end{cases} \tag{4.25}$$

Преобразуем систему уравнений (4.25), сгруппировав контурные токи:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2 + R_4) + I_{22}(-R_2) = E_1 + E_2; \\ I_{11}(-R_2) + I_{22}(R_2 + R_3 + R_5) = -E_2 - E_3. \end{cases} \tag{4.26}$$

Если обозначим:

$R_1 + R_2 + R_4 = R_{11}$ – собственное сопротивление контура, по которому протекает контурный ток I_{11};

$R_2 + R_3 + R_5 = R_{22}$ – собственное сопротивление контура, по которому протекает контурный ток I_{22};

$R_2 = R_{12} = R_{21}$ – общее сопротивление контуров, т.е. сопротивление смежной ветви;

$E_1 + E_2 = E_{11}$ – контурная ЭДС первого контура;

$-E_2 - E_3 = E_{22}$ – контурная ЭДС второго контура,

то система уравнений (4.26) будет иметь следующий вид:

$$I_{11}R_{11} - I_{22}R_{12} = E_{11}; \qquad (4.27)$$

$$- I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} = E_{22}$$

Матрица коэффициентов симметрична относительно главной оси.

Приведенная компактная запись системы уравнений (4.27) позволяет выработать алгоритм составления системы уравнений для более сложных схем электрических цепей.

Расчет электрических цепей методом контурных токов ведут в такой последовательности. Полагают, что в каждом независимом контуре протекает свой контурный ток. Задают их положительные направления, которые обозначают на схеме. Выбирают направления обхода контуров и по второму закону Кирхгофа составляют уравнения для независимых контуров. Решив полученную систему уравнений, находят контурные токи. Затем задают положительные направления действительных токов в ветвях и обозначают их на схеме. Значения токов в ветвях определяют алгебраической суммой соответствующих контурных токов, проходящих по данной ветви.

Если представить, что токи всех ветвей направлены к верхнему узлу (рис. 4.12), то уравнения для их определения будут следующими:

$$I_1 = I_{11};\ \ I_2 = I_{22} - I_{11};\ \ I_3 = -I_{22}.$$

Следует отметить, что в уравнениях по 2 закону Кирхгофа сумма падений напряжений особая, так как суммируются падение напряжения от протекания контурного тока по собственным сопротивлениям контура и добавки от протекания соседних токов по общим сопротивлениям. Эти добавки берутся со знаком « – », потому что в общих сопротивлениях контуров контурные токи текут во встречных направлениях.

Пример 4.3. Для цепи (рис. 4.13) известны $E_1 = 8$ В, $E_2 = 6$ В, $R_1 = R_3 =$ $= 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом. Определить токи в цепи методом контурных токов.

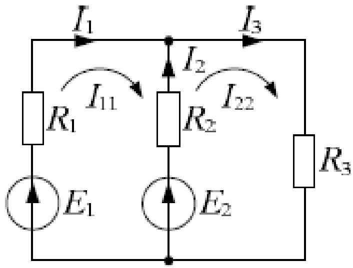

Рис. 4.13

Решение. Указываем направления контурных токов I_{11}, I_{22}. Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа, используя систему уравнений (4.27):

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 = E_1 - E_2; \\ I_{22}(R_2 + R_3) - I_{11}R_2 = E_2. \end{cases}$$

Подставляем числовые значения величин:

$$\begin{cases} I_{11}6 - I_{22}4 = 2; \\ I_{22}6 - I_{11}4 = 6. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы ток I_{11}:

$$I_{11} = \frac{2 + I_{22}4}{6} = 0,333 + I_{22} \cdot 0,666. \qquad (4.28)$$

Подставим выражение тока I_{11} во второе уравнение системы:

$$I_{22}6 - (0,333 + I_{22} \cdot 0,666)4 = 6.$$

Решаем уравнение с одним неизвестным и находим $I_{22} = 2,2$ А, тогда по уравнению (4.28) $I_{11} = 1,8$ А.

Токи в ветвях: $I_1 = I_{11} = 1,8$ А; $I_2 = I_{22} - I_{11} = 2,2 - 1,8 = 0,4$ А; $I_3 = I_{22} = 2,2$ А.

Проверим по балансу мощностей:

мощность источников ЭДС

$$P_{и} = E_1I_1 + E_2I_2 = 8 \cdot 1,8 + 6 \cdot 0,4 = 16,8 \text{ Вт};$$

мощность приемников

$$P_{п} = I_1^2R + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 = 1,8^2 \cdot 2 + 0,4^2 \cdot 4 + 2,2^2 \cdot 2 = 16,8 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей соблюдается: $P_{и} = P_{п}$.

Расчет токов выполнен правильно.