49 Способы представления синусоидальных величин

8.4. Различные способы представления синусоидальных величин

Известно несколько способов представления синусоидально изменяющихся величин: в виде тригонометрических функций (8.1), графиков изменений во времени (см. рис. 8.1), вращающихся векторов, в виде комплексных чисел.

Тригонометрическая форма представления синусоидальных величин, равно как и в виде графических зависимостей, практически применима только для простейших электрических цепей, не содержащих большого числа контуров, источников, взаимных индуктивностей и т. п. Это ограничение связано с трудоемкостью выполнения математических действий с синусоидальными величинами токов, напряжений, ЭДС.

Пример 8.2. Определить ток $i_3 = i_1 + i_2$, если $i_1 = 20 \sin (\omega t + 30°)$ А, $i_2 = 40 \sin (\omega t + 60°)$ А.

Решение. При сложении синусоидальных величин одной и той же частоты результирующая величина будет синусоидальной.

Чтобы записать функцию результирующей величины, необходимо определить ее максимальное значение и начальную фазу. Следует иметь в виду, что максимумы синусоидальных функций могут наступать неодновременно, поэтому нельзя суммировать амплитудные значения алгебраически.

Проведем сложение токов с помощью построения их графических зависимостей. Изображаем графики зависимостей i_1 и i_2 от времени (рис. 8.4), суммируя ординаты зависимостей i_1 и i_2 для одного и того же момента времени с учетом знака, получаем зависимость $i_3 = i_1 + i_2$.

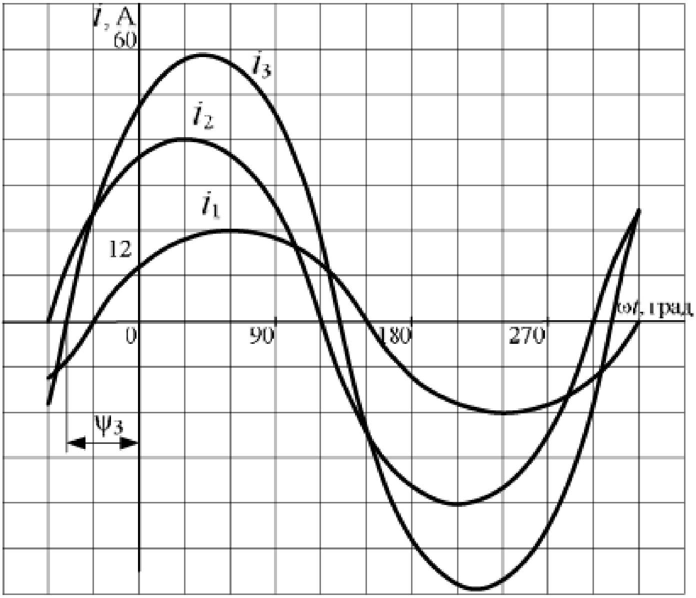

Рис. 8.4. Графические зависимости токов i_1, i_2, i_3

По графику тока i_3 определяем амплитуду тока $I_{m_3} = 58$ А и начальную фазу $\psi_{i_3} = 48°$, после чего записываем тригонометрическую функцию $i_3 = 58 \sin(\omega t + 48°)$ А.

Для получения более достоверных результатов необходимо проводить достаточно точное построение графических зависимостей синусоидальных величин, что требует значительной затраты времени.

Для упрощения расчетов цепей переменного тока вводится условное изображение синусоидальных функций векторами.

Пусть длина вектора $\overline{I}_m$ равна амплитуде тока $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Начало вектора $\overline{I}_m$ поместим в начало прямоугольной системы координат, вектор расположим под углом ψ_i (рис. 8.5) к горизонтальной оси.

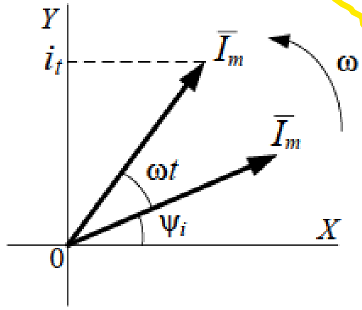

Рис. 8.5. Изображение синусоидальной функции тока *i* вращающимся вектором

Отметим, что положительные углы откладываются против часовой стрелки, отрицательные – по часовой стрелке.

Представим, что вектор $\bar{I}_m$ с момента времени $t = 0$ начинает вращаться вокруг начала системы координат против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью, равной угловой частоте ω. Проекция конца вектора на ось ординат совершает синусоидальные колебания, и каждое мгновенное значение тока, соответствующее моменту времени *t*, можно рассматривать как проекцию на ось ординат вектора $\bar{I}_m$, повернувшегося на фазовый угол ωt относительно оси абсцисс (рис. 8.5).

Следовательно, величину, изменяющуюся во времени по синусоидальному закону, можно изобразить вращающимся вектором.

Совокупность векторов, изображающих синусоидальные ЭДС, напряжения, токи одной и той же частоты, называют *векторной диаграммой*.

Поскольку все синусоидальные величины одной и той же частоты, угловая скорость всех векторов одинакова и взаимное расположение векторов в любой момент времени остается неизменным, поэтому все векторы векторной диаграммы изображают, как правило, для момента времени $t = 0$, тогда начальное положение векторов на координатной площади определяется начальными фазами.

Применение векторных диаграмм позволяет просто и наглядно вести расчеты электрических цепей. Например, сложение или вычитание мгновенных значений синусоидальных величин можно заменить сложением или вычитанием векторов, их изображающих.

Пример 8.3. Определить ток $i_3 = i_1 + i_2$ по условию примера 8.2 с помощью векторной диаграммы.

Решение. Выбираем масштаб тока и откладываем векторы на координатной плоскости с учетом начальных фаз (рис. 8.6).

Просуммировав векторы тока $\overline{I}_{m_1}$ и $\overline{I}_{m_2}$, получили суммарный вектор $\overline{I}_{m_3}$, длина которого в масштабе равна 58 А, начальная фаза $\psi_{i_3} = 46°$:

$$i_3 = 58 \sin (t\omega + 46°) \text{ А}.$$

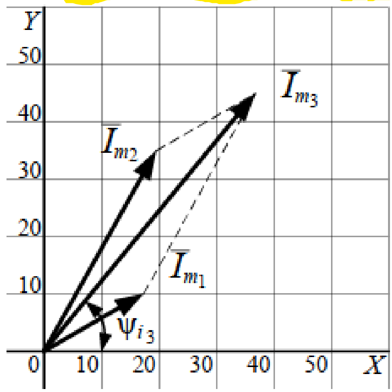

Рис. 8.6. Сложение векторов, изображающих синусоидальные токи i_1, i_2

Применение векторных диаграмм упрощает расчет электрических цепей переменного тока, но требует выполнения определенной графической работы и не дает достаточной точности результата.

Есть возможность объединить простоту векторных диаграмм с возможностью вести расчет электрических цепей синусоидального напряжения с любой точностью. Эта возможность реализуется с помощью представления синусоидальных величин комплексными числами.

Вектор тока, изображающий синусоидальный ток $i = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$, можно расположить на комплексной плоскости (рис. 8.7), где горизонтальную ось называют *осью вещественных чисел*, а вертикальную – *осью мнимых чисел*; $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

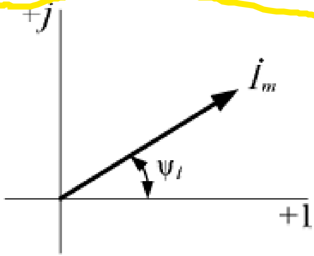

Рис. 8.7. Вектор тока на комплексной плоскости

Вектор $\dot{I}_m$ называют *комплексной амплитудой тока*.

Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует комплексное число, которое может быть записано в различных формах: показательной, тригонометрической, алгебраической, полярной.

В показательной форме комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}.$$

В полярной форме комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = I_m \angle \psi_i,$$

где I_m – амплитуда тока или модуль комплексного числа;

ψ_i – начальная фаза тока или аргумент комплексного числа;

e – основание натурального логарифма;

$j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Величину $e^{j\psi_i}$ называют *оператором поворота*. Умножение комплексной амплитуды $\dot{I}_m$ на $e^{j\psi_i}$ или на $e^{j\omega t}$ означает поворот вектора $\dot{I}_m$ на угол ψ_i или ωt в положительном направлении.

Переход к *тригонометрической форме* записи комплексного числа осуществляют с помощью формулы Эйлера:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = I_m(\cos\psi_i + j\sin\psi_i).$$

Вычислив значения $\cos\psi_i$ и $\sin\psi_i$, получим *алгебраическую форму* комплексного числа:

$$\dot{I}_m = I_m\left(\cos\psi_i + j\sin\psi_i\right) = a + jb,$$

где $a = I_m\cos\psi_i$ – **действительная часть** комплексного числа или проекция вектора $\dot{I}_m$ на ось вещественных чисел;

$b = I_m\sin\psi_i$ – **коэффициент при мнимой части** комплексного числа или проекция вектора $\dot{I}_m$ на ось мнимых чисел.

Переход от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной осуществляют в такой последовательности: если дана комплексная амплитуда тока в виде $\dot{I}_m = a + jb$, определяют модуль числа $I_m = \sqrt{a^2 + b^2}$ и аргумент $\psi_i = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$. Значит, **в показательной форме** получим $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$.

Замечание. **Обычно при расчетах пользуются действующими значениями. Комплекс действующего значения** электрической величины **получают путем деления комплексной амплитуды на** $\sqrt{2}$. Комплексы действующих значений кратко **называют** комплексом величины, например **комплекс тока**.

Буквенные обозначения синусоидально изменяющихся величин приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1

Буквенные обозначения синусоидально изменяющихся величин

Обозначение	Название
i, u, e	Мгновенные значения (соответственно тока, напряжения, ЭДС)
I_m, U_m, E_m	Амплитудные значения
I, U, E	Действующие значения
$\dot{I}_m$, $\dot{U}_m$, $\dot{E}_m$	Комплексные амплитуды
$\dot{I}$, $\dot{U}$, $\dot{E}$	Комплексные действующие значения

Пример 8.4. Представить в показательной, тригонометрической, алгебраической формах и изобразить вектором напряжение $u = 20\sin(\omega t + 30°)$ В на комплексной плоскости.

$\underline{I}$, $\underline{U}$, $\underline{E}$ – комплексные действующие значения, более современная запись

Решение.

а) показательная: $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = 20e^{j30°}$ В;

б) тригонометрическая $\dot{U}_m = U_m(\cos\psi + j\sin\psi) = 20(\cos 30° + j\sin 30°)$ В

в) алгебраическая: $\dot{U}_m = U_m(\cos\psi + j\sin\psi) = 20\frac{\sqrt{3}}{2} + j20\frac{1}{2} = 17{,}3 + j10$ В

Изображение синусоидальной функции вектором на комплексной плоскости показано на рисунке 8.8. Если величина задана в алгебраической форме (например, напряжение $\dot{U}_m = 17{,}3 + j10$ В), то, чтобы выразить его в показательной, определим амплитуду

$$U_m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{17{,}3^2 + 10^2} = 20 \text{ В}$$

и начальную фазу

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\frac{10}{17{,}3} = 30°, \text{ тогда } \dot{U}_m = 20e^{j30°} \text{ В}.$$

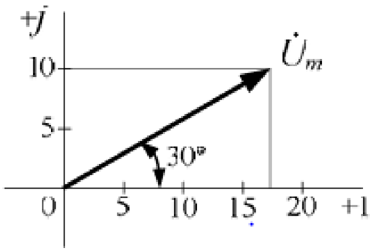

Рис. 8.8. Вектор комплексной амплитуды напряжения

Пример 8.5. Определить ток $i_3 = i_1 + i_2$, если $i_1 = 20\sin(\omega t + 30°)$ А $i_2 = 40\sin(\omega t + 60°)$ А аналитически.

Решение. Для аналитического сложения запишем комплексные амплитуды токов:

$$\dot{I}_{m_1} = 20e^{j30°} = 20\cos 30° + j20\sin 30° = 17{,}3 + j10 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{m_2} = 40e^{j60°} = 40\cos 60° + j40\sin 60° = 20 + j34{,}6 \text{ А}.$$

Значит, $\dot{I}_{m_3} = \dot{I}_{m_1} + \dot{I}_{m_2} = 17{,}3 + j10 + 20 + j34{,}6 = 37{,}3 + j44{,}6$ А.

Чтобы записать мгновенное значение тока i_3, определим амплитуду:

$$I_{m_3} = \sqrt{37{,}3^2 + 44{,}6^2} = 58 \text{ А}$$

и начальную фазу:

$$\psi_3 = \mathrm{arctg}\,\frac{44{,}6}{37{,}3} = 50°.$$

Тогда

$$i_3 = 58\,\sin\left(\omega t + 50°\right)\ \text{А}.$$

Метод расчета электрических цепей синусоидального тока, основанный на изображении гармонических функций комплексными числами, называют *методом комплексных величин* или *символическим методом*.

Записав основные законы электрических цепей (закон Ома, законы Кирхгофа) в комплексной форме, можно применить те же методы расчета, что и для цепей постоянного напряжения.

Символический метод сохраняет наглядность графического решения, так как по символической записи электрических величин – тока, напряжения, ЭДС – легко построить векторную диаграмму, а также дает возможность, используя аналитический метод, решать вопросы с высокой степенью точности.

Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Поясните понятия синусоидальных ЭДС, напряжения, тока.

2. Назовите основные величины, характеризующие синусоидально изменяющуюся величину.

3. Изобразите синусоидальную функцию вектором и комплексным числом.

4. Запишите комплексную амплитуду тока в показательной, тригонометрической и алгебраической формах, если мгновенное значение тока $i = 141\,\sin\,(\omega t - 30°)$ А. Ответ: $\dot{I}_m = 141 e^{-j30°}$; $\dot{I}_m = 141\,(\cos\,30° - \sin\,30°)$; $\dot{I}_m = 122{,}3 - j70{,}5$.

5. Объясните, что понимают под средним и действующим значениями синусоидально изменяющейся величины.

6. Просуммируйте аналитически и с помощью векторов две синусоидальные функции: $e_1 = 282\,\sin\,\omega t$ В и $e_2 = 141\,\sin\,(\omega t + 60°)$ В. Ответ: $e_3 = 372{,}2\,\sin\,(\omega t - 19°)$.

7. Раскройте понятие векторной диаграммы. На основании чего и как ее строят?

8. Запишите тригонометрическую функцию тока i, если комплекс действующего значения $\dot{I} = 6 - j8$ А, f = 50 Гц. Ответ: $i = 14{,}1 \sin(314t - 53°)$.

9. Два генератора синусоидальной ЭДС включены параллельно. Ток одного генератора $i_1 = 100 \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ А. Общий ток генератора $i = i_1 + i_2 = 100 \sin \omega t$ А. Найдите выражение тока второго генератора i_2. Ответ: $i_2 = 100 \sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ А.