55-56 Цепь синусоидального тока с конденсатором

Рассмотрение процессов в цепи, обладающей только емкостью, является также научной абстракцией, как и в случае цепи с индуктивностью.

В цепи (рис. 9.8) с идеальным конденсатором (конденсатором без потерь), включенным на синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, электрический заряд на пластинах конденсатора изменяется пропорционально напряжению $q = C_u = CU_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и, следовательно, в цепи будет проходить переменный ток. Мгновенный ток в цепи равен скорости изменения заряда конденсатора:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left[CU_m \sin(\omega t + \psi_u)\right] =$$

$$= \omega C U_m \cos(\omega t + \psi_u) = I_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (9.3)$$

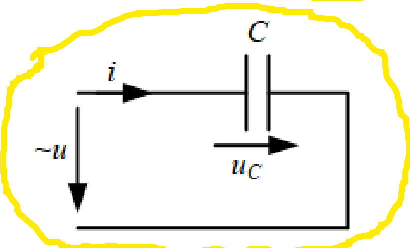

Рис. 9.8. Схема цепи переменного напряжения
с емкостным элементом

Согласно выражению (9.3), ток, проходящий через емкостный элемент C, изменяется по синусоидальному закону и имеет начальную фазу $\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, ток i опережает приложенное напряжение u на угол $\frac{\pi}{2}$. Нулевым значениям тока соответствуют максимальные (положительные или отрицательные) значения напряжения (рис. 9.9).

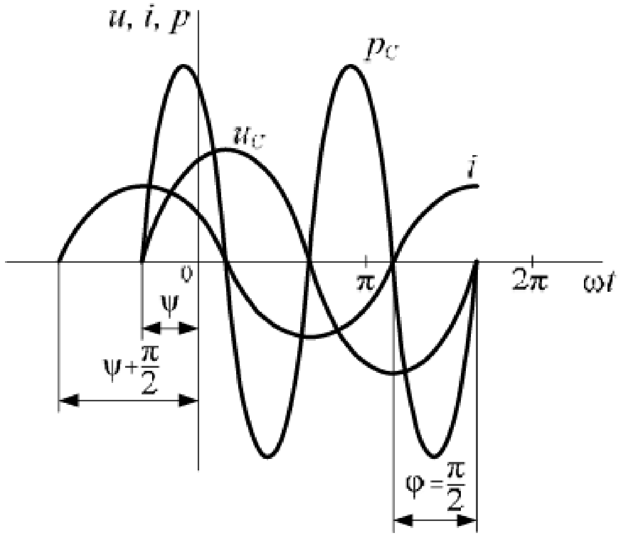

Рис. 9.9. Мгновенные значения напряжения, тока и мощности в емкости

Сдвиг по фазе между напряжением и током в цепи с емкостью отрицательный:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

Амплитудные и соответственно действующие значения напряжения и тока связаны соотношением, подобным закону Ома:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m; \quad U = \frac{1}{\omega C} I = X_C I.$$

Величину $X_C = \frac{1}{\omega C}$, имеющую размерность сопротивления (Ом), называют *емкостным сопротивлением*. Обратную емкостному сопротивлению величину $b_C = \omega C$, имеющую размерность проводимости (См), называют *емкостной проводимостью*.

Следовательно,

$$I_m = b_C U_m; \;\; I = b_C U.$$

В комплексной форме соотношение между векторами

$$\dot{U}_m = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_m = -jX_C\dot{I}_m; \;\; \dot{U} = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = -jX_C\dot{I}.$$

Вектор тока $\dot{I}$ опережает вектор напряжения $\dot{U}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 9.10).

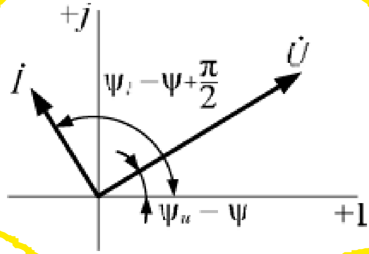

Рис. 9.10. Векторная диаграмма напряжения
и тока для участка цепи с емкостью

Мгновенная мощность, поступающая в емкость, равна скорости изменения электрического поля емкости:

$$p_C = u_C i = U_m \sin(\omega t + \psi_u) I_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{U_m I_m}{2} 2 \sin(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_u) = UI \sin(2\omega t + \psi_u).$$

Мощность колеблется по синусоидальному закону с угловой частотой 2ω, имея амплитуду UI (см. рис. 9.9). Поступая от источника питания, энергия временно (в течение четверти периода, когда мощность положительна) запасается в электрическом поле емкости, а затем (в следующую четверть периода, когда мощность отрицательна) возвращается в источник при исчезновении электрического поля. Таким образом происходит колебание (обмен) энергии между источником питания и емкостью, причем активная мощность $P = 0$.

Пример 9.1. К цепи приложено напряжение $u = 50 \sin \omega t$ В, ток в цепи: 1) $i = 10 \sin \omega t$ А; 2) $i = 10 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ А; 3) $i = 10 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ А. Какие сопротивления включены в цепь в каждом из трех случаев?

Решение. Из условия задачи следует, что $U_m = 50$ В, $I_m = 10$ А. В первом случае включено только активное сопротивление, так как напряжение и ток совпадают по фазе: $\psi_u = 0$ и $\psi_i = 0$; $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$.

Согласно закону Ома, активное сопротивление

$$R = \frac{U_m}{I_m} = \frac{50}{10} = 5 \text{ Ом}.$$

Во втором случае ток отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, и содержит только индуктивное сопротивление:

$$X_L = \frac{U_m}{I_m} = \frac{50}{10} = 5 \text{ Ом}.$$

В третьем случае ток опережает по фазе напряжение на $\frac{\pi}{2}$ – в цепь включена только емкость, сопротивление которой

$$X_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{50}{10} = 5 \text{ Ом}.$$

Пример 9.2. По индуктивному элементу L = 10 мГн проходит ток $i = 10 \sin (1000t + 30°)$ А. Записать выражение падения напряжения на индуктивности.

Решение. Ответ можно получить несколькими способами.

1. Можно использовать связь мгновенного тока, проходящего через индуктивность, и мгновенного напряжения на ней:

$$u = L\frac{di}{dt} = 10^{-2} \frac{d\left[10 \sin (1000t + 30°)\right]}{dt} = 10^{-2} \cdot 1000 \cdot 10 \cos (1000t + 30°) =$$

$$= 100 \sin (1000t + 12°) \text{ В}.$$

2. Напряжение на индуктивном элементе изменяется по закону

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Определяем по закону Ома

$$U_m = I_m X_L = I_m \omega L = 10 \cdot 1000 \cdot 10^{-2} = 100 \text{ В}.$$

Определяем начальную фазу ψ_u из выражения $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

Поскольку угол сдвига фаз на индуктивном элементе равен 90°, то

$$\psi_u = \varphi + \psi_i = 90° + 30° = 120°;$$

$$u = 100 \sin(1000t + 120°) \text{ В}.$$