57-58 Цепь синусоидального тока с реальной катушкой индуктивности

Схема замещения реальной катушки на низких частотах представляет собой последовательное соединение активного и индуктивного элементов (рис. 9.11).

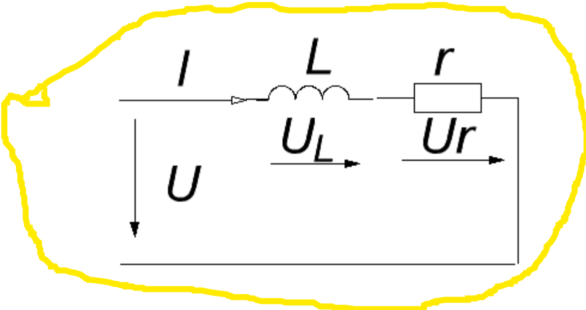


Рис. 9.11. Схема замещения реальной катушки

Пусть по цепи под действием синусоидального напряжения u протекает ток $i = I_m \sin \omega t$. На элементах возникнут напряжения $u_а = iR$ – активная составляющая напряжения; $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ – индуктивная составляющая напряжения. Следует отметить, что в реальных катушках нет таких точек, между которыми действовало бы напряжение $u_а$ или u_L. Физической величиной является напряжение на выводах обмотки катушки. Деление физической величины на составляющие представляет собой удобный вычислительный прием. Напряжение на катушке можно записать согласно второму закону Кирхгофа:

$$u = u_а + u_L = RI_m \sin \omega t + L\omega I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (9.4)$$

Обе составляющие напряжения изменяются по синусоидальному закону. Известно, что сумма синусоидальных функций одной и той же частоты есть синусоидальная функция той же частоты, т. е. $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Изобразив все составляющие выражения (9.4) векторами, построим векторную диаграмму (рис. 9.12) для действующих значений.

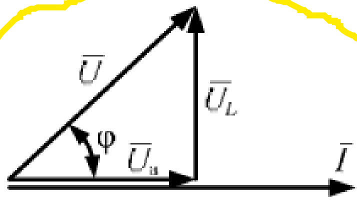


Рис. 9.12. Векторная диаграмма для цепи с реальной катушкой

За основной вектор принимаем вектор тока $\overline{I}$. Вектор активного напряжения совпадает по фазе с вектором тока, вектор индуктивного напряжения опережает вектор тока на 90°.

Из треугольника напряжений можно составить ряд соотношений, которые часто встречаются при расчете цепей синусоидального тока:

$$U_а = U \cos\varphi; \;\; U_L = U \sin\varphi; \;\; U = \sqrt{U_а^2 + U_L^2}.$$

Величина угла сдвига фаз зависит от соотношения индуктивной и активной составляющих напряжения и определяется из векторной диаграммы (см. рис. 9.12):

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{U_L}{U_а}.$$

Поскольку $U_а = IR$, $U_L = \omega LI$, то напряжение цепи

$$U = \sqrt{U_а^2 + U_L^2} = \sqrt{(RI)^2 + (\omega LI)^2} = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

откуда ток в цепи

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U}{Z}. \tag{9.5}$$

Формула (9.5) выражает закон Ома в действующих значениях для цепи с активным сопротивлением и индуктивностью. Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \tag{9.6}$$

называется полным сопротивлением цепи и измеряется в омах.

Следует обратить внимание на то, что различная физическая природа активного и реактивного сопротивлений определяет особое правило сложения этих сопротивлений.

На основании выражения (9.6) полное, активное и реактивное сопротивления графически представляют прямоугольный треугольник (рис. 9.13).

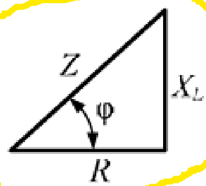


Рис. 9.13. Треугольник сопротивлений цепи с активным сопротивлением и индуктивностью

Треугольник сопротивлений подобен треугольнику напряжений, так как его можно получить из треугольника напряжений, уменьшив его стороны в I раз.

Угол сдвига фаз можно определить из треугольника сопротивлений $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{X_L}{R}$, т. е. его величина зависит от соотношения индуктивного и активного сопротивлений.

Второй закон Кирхгофа для рассматриваемой цепи можно записать и в комплексной форме:

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{а}} + \dot{U}_L.$$

Согласно закону Ома, в комплексной форме

$$\dot{U}_{а} = \dot{I}R,\ \dot{U}_{L} = j\omega L\dot{I},$$

тогда

$$\dot{U} = \dot{I}R + j\omega L\dot{I},$$

откуда

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}. \qquad (9.7)$$

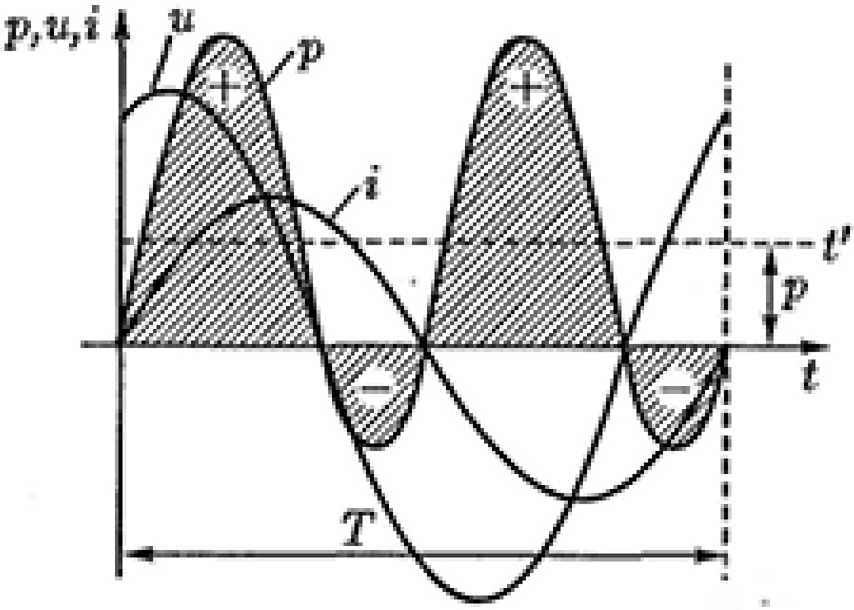
Выражение (9.7) представляет собой закон Ома в комплексной форме для цепи с реальной катушкой. Здесь $\underline{Z} = R + j\omega L$ называют комплексом полного сопротивления.

Рассмотрим энергетическое состояние цепи, содержащей активное сопротивление и индуктивность.

Мгновенная мощность в рассматриваемой цепи

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \varphi) I_m \sin \omega t = UI \cos\varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi). \qquad (9.8)$$

Очевидно, что мгновенная мощность изменяется по синусоидальному закону с двойной частотой (рис. 9.14).



Мгновенную мощность (9.8) можно рассматривать как сумму двух составляющих: постоянной $UI\cos\varphi$ и синусоидальной изменяющейся с двойной частотой.

В определенные части периода (см. рис. 9.14), когда направления тока и напряжения совпадают, мгновенная мощность положительна. В это время энергия поступает от источника к потребителю, где преобразуется на активном элементе в тепловую энергию, и накапливается на индуктивном элементе магнитная энергия. В небольшой период времени (см. рис. 9.14) мгновенная мощность отрицательна (направления тока и напряжения противоположны). Накопленная энергия в магнитном поле возвращается обратно источнику. Таким образом, в цепи наряду с преобразованием электрической энергии в тепловую происходит обмен электроэнергией между источником питания и катушкой.

Среднее значение мгновенной мощности за период

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T \left[UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + \varphi)\right]dt = UI\cos\varphi.$$

Средняя мощность равна постоянной составляющей мгновенной мощности, всегда положительна. Она характеризует интенсивность передачи энергии от источника к приемнику и преобразование в другие виды энергии, т. е. активный необратимый процесс. Поэтому среднюю мощность называют *активной мощностью*:

$$P = UI\cos\varphi.$$

Единица измерения – ватт (Вт).

Поскольку $U\cos\varphi = U_{\text{а}} = IR,$ то активную мощность можно определить как $P = I^2R.$

Обмен энергией количественно оценивается *реактивной индуктивной мощностью* $Q_L = U_L I.$

Так как реактивная составляющая напряжения $U_L = U\sin\varphi,$ то реактивная индуктивная мощность

$$Q_L = UI\sin\varphi.$$

Реактивная мощность измеряется в варах (вар).

Поскольку $U\sin\varphi = U_L = IX_L$, реактивную мощность можно определить $Q_L = I^2 X_L$.

Произведение действующих значений напряжения и тока называют *полной мощностью* S:

$$S = UI.$$

Единица измерения полной мощности – вольт-ампер (ВА).

Применение различных названий единиц измерения мощности позволяет определить, какая мощность рассматривается: активная, реактивная или полная.

Активная, реактивная и полная мощности графически изображаются сторонами прямоугольного треугольника мощностей (рис. 9.15).

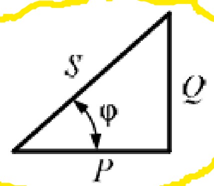


Рис. 9.15. Треугольник мощностей

Из треугольника мощностей следует, что полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q_L^2}.$$

Активная мощность $P = S\cos\varphi$, откуда следует, что $\cos\varphi = \dfrac{P}{S}$.

Отношение активной мощности к полной называют *коэффициентом мощности*. В цепях синусоидального тока он численно равен косинусу угла сдвига фаз.

Коэффициент мощности показывает, какая часть полной мощности идет на совершение работы. Коэффициент мощности имеет важное экономическое значение, о котором будет сказано ниже.

Пример 9.3. Определить мгновенное значение тока в цепи с последовательным соединением резистора и индуктивной катушки, если мгновенное значение приложенного к цепи напряжения $u = 100\sqrt{2}\sin\omega t$ В, активное сопротивление $R = 6$ Ом, индуктивное сопротивление $X_L = 8$ Ом.

Решение. Ток в цепи можно определить по закону Ома для действующих значений напряжения и тока:

$$I = \frac{U}{Z}.$$

Действующее значение напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В}.$$

Полное сопротивление

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ Ом},$$

тогда

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{10} = 10 \text{ А}.$$

Амплитудное значение тока $I_m = \sqrt{2}I = 10\sqrt{2}$ А.

Сдвиг фаз между напряжением и током

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \text{arctg}\,\frac{X_L}{R} = \text{arctg}\,\frac{8}{6} = 53°.$$

Поскольку $\psi_u = 0$, то $\psi_i = -\varphi = -53°$. Значит,

$$i = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - 53°) \text{ А}.$$

Пример 9.4. Цепь с последовательным соединением активного сопротивления R и индуктивности L подключена к источнику синусоидального напряжения U = 200 В, частота 50 Гц. По цепи протекает ток I = 2 А, потребляется активная мощность P = 240 Вт. Определить параметры цепи R и L.

Решение. Активное сопротивление цепи определяем из формулы активной мощности:

$$P = UI\cos\varphi = I^2R;\ R = \frac{P}{I^2} = \frac{240}{2^2} = 60 \text{ Ом}.$$

По закону Ома определяем полное сопротивление цепи

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{200}{2} = 100 \text{ Ом}.$$

Так как $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$, то $X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{100^2 - 60^2} = 80$ Ом.

Следовательно,

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{80}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = 0{,}255 \text{ Гн}.$$