61-62 Цепь с активным сопротивлением, индуктивностью и конденсатором

Пусть в ветви, состоящей из последовательно соединенных активного R, индуктивного L и емкостного C элементов, т. е. в последовательном контуре, или коротко RLC-цепи (рис. 10.1), ток изменяется по синусоидальному закону:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

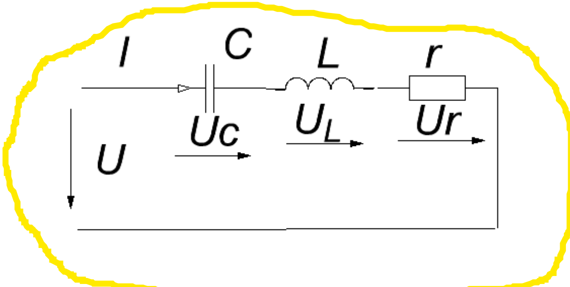

Рис. 10.1. Схема последовательного контура

На выводах этой цепи создается синусоидальное напряжение, равное алгебраической сумме синусоидальных напряжений на отдельных элементах в соответствии со вторым законом Кирхгофа:

$$u = u_R + u_L + u_C. \tag{10.1}$$

Напряжение u_R на сопротивлении R совпадает по фазе с током i:

$$u_R = Ri = RI_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Напряжение u_L на индуктивности L опережает ток i на угол $\frac{\pi}{2}$:

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right),$$

а напряжение u_C на емкости C отстает по фазе от тока i на угол $\frac{\pi}{2}$:

$$u_C = \frac{1}{C}\int i dt = -\frac{I_m}{\omega C}\cos\left(\omega t + \psi_i\right) = \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right).$$

На рисунке 10.2 показаны мгновенные значения тока в цепи и напряжений на отдельных ее элементах. Здесь имеет место случай, когда начальная фаза тока $\psi_i > 0$, а амплитуда напряжения на индуктивности больше амплитуды напряжения на емкости, т. е. индуктивное сопротивление X_L больше X_C. Как видно, напряжения на емкости и на индуктивности сдвинуты относительно друг друга по фазе на угол π, т. е. находятся в противофазе.

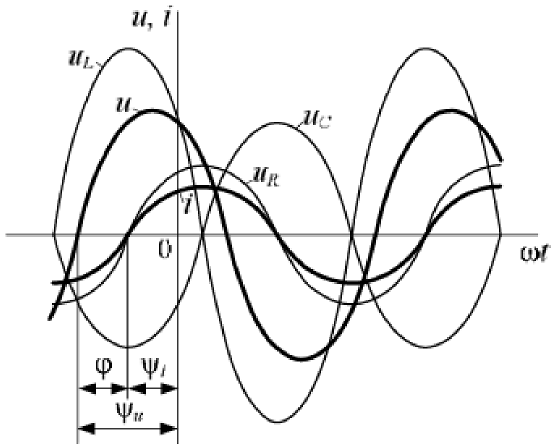

Рис. 10.2. Кривая мгновенных значений тока и напряжений в *RLC*-цепи

В соответствии с выражением (10.1) ординаты кривой напряжения $u = U_m \sin\left(\omega t + \psi_u\right)$ равны алгебраической сумме ординат кривых u_R, u_L, u_C:

$$U_m \sin\left(\omega t + \psi_u\right) = RI_m \sin\left(\omega t + \psi_i\right) + \omega L I_m \cos\left(\omega t + \psi_i\right) -$$

$$-\frac{I_m}{\omega C}\cos\left(\omega t + \psi_i\right) = RI_m \sin\left(\omega t + \psi_i\right) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m \cos\left(\omega t + \psi_i\right). \quad (10.2)$$

Уравнение (10.2) представляет собой тригонометрическую форму записи второго закона Кирхгофа для мгновенных напряжений. Входящую в него величину

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

называют *реактивным сопротивлением* цепи. В зависимости от знака реактивное сопротивление может иметь индуктивный ($X > 0$) или емкостный ($X < 0$) характер.

Определение напряжения u на входе цепи сводится к вычислению амплитуды U_m и начальной фазы ψ_u. Это можно сделать по графическим зависимостям (см. рис. 10.2).

Расчет удобнее произвести, воспользовавшись изображением синусоидальных величин, векторами, построив векторную диаграмму на основании второго закона Кирхгофа в векторной форме (рис. 10.3):

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C.$$

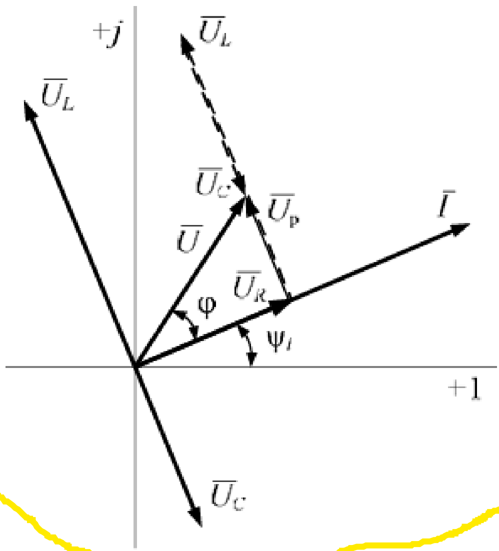

Рис. 10.3. Векторная диаграмма для *RLC*-цепи

Вектор падения напряжения на активном сопротивлении совпадает по направлению с вектором тока – активная составляющая напряжения. Вектор падения напряжения на индуктивности опережает вектор тока на 90° – индуктивная составляющая напряжения. Вектор падения напряжения на электрической емкости отстает от вектора тока на 90° – емкостная составляющая напряжения. Сложив векторы падений напряжений $\bar{U}_R$, $\bar{U}_L$, $\bar{U}_C$ (см. рис. 10.3), получим вектор напряжения $\dot{U}$, приложенного к цепи.

Поскольку векторы индуктивного и емкостного напряжений находятся в противофазе, то результирующая их составляющая (действующее значение) будет $U_{L-C} = U_L - U_C$. Это так называемая реактивная составляющая общего приложенного напряжения.

Из векторной диаграммы (см. рис. 10.3) следует

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}.$$

Угол сдвига фаз φ между напряжением и током может быть определен следующим соотношением:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{U_L - U_C}{U_R}.$$

Тогда начальная фаза приложенного синусоидального напряжения

$$\psi_u = \varphi + \psi_i.$$

Согласно закону Ома, $U = IR$, $U_L = I\omega L = IX_L$, $U_C = I\dfrac{1}{\omega C} = IX_C$,

поэтому

$$U = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \qquad (10.3)$$

Из выражения (10.3) следует

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \qquad (10.4)$$

Выражение (10.4) называют законом Ома для *RLC*-цепи. В знаменателе этого выражения находится полное сопротивление цепи, обозначаемое Z:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 - X^2},$$

где X – результирующее реактивное сопротивление цепи.

Полное сопротивление цепи можно представить геометрически как прямоугольный треугольник сопротивлений (рис. 10.4), подобный треугольнику напряжений.

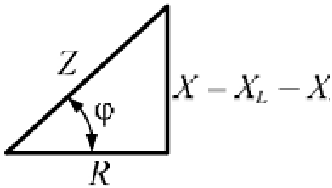

Рис. 10.4. Треугольник сопротивлений в *RLC*-цепи

Из треугольника сопротивлений следует, что угол сдвига фаз φ зависит от соотношения активных и реактивных сопротивлений:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Поскольку реактивное сопротивление $X = X_L - X_C$, то при $X_L > X_C$ угол сдвига фаз $\varphi > 0$ и цепь носит активно-индуктивный характер, часть индуктивного сопротивления компенсирует действие емкостного.

Если $X_L < X_C$, угол $\varphi < 0$, цепь носит активно-емкостный характер. Возможен случай, когда $X_L = X_C$, т. е. результирующее сопротивление $X = 0$. Тогда цепь имеет чисто активное сопротивление. Это случай, при котором имеет место явление, называемое *резонансом напряжения* (будет рассмотрено ниже).

Энергетические процессы в рассматриваемой цепи будут аналогичны тем, что происходят в *RL*-цепи или *RC*-цепи.

Активная мощность

$$P = UI\cos\varphi = I^2 R. \tag{10.5}$$

Реактивная мощность

$$Q = UI\sin\varphi = I^2 X = I^2 (X_L - X_C) = Q_L - Q_C. \tag{10.6}$$

Из выражения (10.6) следует, что реактивная мощность цепи есть алгебраическая сумма реактивных индуктивной и емкостной мощностей. Индуктивная мощность положительна, емкостная – отрицательна. Это следует из того, что напряжение на индуктивном элементе опережает ток по фазе на 90°, а напряжение на емкостном элементе отстает от тока на 90°.

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{10.7}$$

По аналогии с полным сопротивлением можно составить прямоугольный треугольник полной мощности.

В общем случае цепь может состоять из любого числа последовательно соединенных элементов, обладающих активными и реактивными сопротивлениями.

Действующее значение напряжения на входе цепи определяется из прямоугольного треугольника, получаемого при построении векторной диаграммы. Одним катетом треугольника является активная составляющая напряжения $U_а$, равная арифметической сумме активных составляющих напряжений участков *RLC*-цепи, $U_а = \sum U_{а_k}$. Другим катетом – реактивная составляющая напряжений $U_р$, которая равна алгебраической сумме реактивных составляющих всех участков цепи:

$$U_р = \sum U_{L_k} - \sum U_{C_k}.$$

Таким образом, напряжение цепи

$$U = \sqrt{U_а^2 + U_р^2} = \sqrt{\left(\sum U_{а_k}\right)^2 + \left(\sum U_{L_k} - \sum U_{C_k}\right)^2}.$$

Так как $U_а = IR$; $U_р = IX$, то

$$U = \sqrt{(IR)^2 + (IX)^2} = \sqrt{\left(\sum IR_k\right)^2 + \left(\sum IX_{L_k} - \sum IX_{C_k}\right)^2}$$

или

$$U = I\sqrt{R^2 + X^2} = I\sqrt{\left(\sum R_k\right)^2 + \left(\sum X_{L_k} - \sum X_{C_k}\right)^2},$$

откуда полное сопротивление цепи

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{\left(\sum R_k\right)^2 + \left(\sum X_{L_k} - \sum X_{C_k}\right)^2}.$$

Угол сдвига фаз определяется через

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = \operatorname{arctg} \frac{\sum X_{L_k} - \sum X_{C_k}}{\sum R_k}.$$

Активная, реактивная и полная мощности определяются по выражениям (10.5)–(10.7).