65-66 Параллельное соединение элементов в цепи

Исследуем цепь с параллельным соединением двух ветвей, подключенных к источнику синусоидального напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ (рис. 10.8). Пусть начальная фаза источника напряжения будет равна нулю ($\psi_u = 0$). Тогда начальная фаза тока в неразветвленной части схемы, в первой и второй ветвях будет $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\psi_i$. Соответственно $\varphi_1 = -\psi_{i_1}$ и $\varphi_2 = -\psi_{i_2}$.

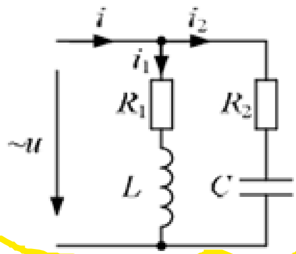

Рис. 10.8. Цепь с параллельным соединением ветвей

С учетом того, что ток в первой ветви имеет активно-индуктивный характер, его мгновенное значение будет иметь следующее выражение: $i_1 = I_{m_1} \sin(\omega t - \varphi_1)$, т. е. начальная фаза тока отстает от начальной фазы напряжения. Во второй ветви ток является активно-емкостным, и его мгновенное значение будет иметь выражение $i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$. Здесь начальная фаза этого тока опережает начальную фазу напряжения. Поэтому она записана со знаком «+».

Действующие значения токов определяем из следующих выражений:

для первой ветви

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}};$$

для второй ветви

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}}.$$

Зная действующие значения токов в ветвях, нельзя определить его действующее значение I в неразветвленной части цепи простым сложением токов I_1 и I_2, так как необходимо учитывать их фазовые углы φ_1 и φ_2. Поэтому ток I определяют как геометрическую сумму токов в ветвях, для чего следует построить векторную диаграмму токов (рис. 10.9).

За основной вектор примем вектор напряжения $\overline{U}$. Векторы токов $\overline{I}_1$ и $\overline{I}_2$ изображаем с учетом углов сдвига фаз φ_1 и φ_2.

Вектор тока в неразветвленной части цепи получаем путем суммирования векторов $\overline{I}_1$ и $\overline{I}_2$.

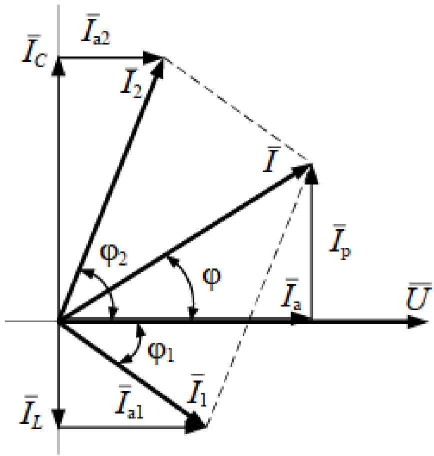

Рис. 10.9. Векторная диаграмма токов

Значение тока I в неразветвленной части цепи можно определить аналитически, для чего вводят понятия активной и реактивной составляющих тока для ветви с последовательным соединением активных и реактивных элементов.

Для первой ветви с элементами R_1L

$$\overline{I}_1 = \overline{I}_{a1(R_1)} + \overline{I}_{p1(L)} \text{ или } \overline{I}_1 = \overline{I}_{a1} + \overline{I}_{p1}.$$

Активная составляющая I_{a1} совпадает по фазе с напряжением (см. рис. 10.9) и определяется как

$$I_{a1} = I_1 \cos\varphi_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} = U\frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} = Ug_1,$$

где $X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление, Ом;

g_1 – активная проводимость первой ветви, См:

$$g_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2}. \tag{10.12}$$

Следует обратить внимание на то, как определяется активная проводимость ветви. Она не является величиной, обратной активному сопротивлению ветви R_1. Активная проводимость рассматриваемой ветви – это отношение активного сопротивления ветви к квадрату полного сопротивления ветви (10.12).

Реактивная составляющая тока $I_{р1}$ отстает по фазе от напряжения на 90° и определяется как

$$I_{р1} = I_1 \sin\varphi_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} \frac{X_L}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} = U \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = U b_L,$$

где

$$b_L = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2}, \tag{10.13}$$

b_L – реактивная (индуктивная) проводимость первой ветви, См.

Как видно из выражения (10.13), реактивная проводимость не является величиной, обратной индуктивному сопротивлению. Она определяется как отношение индуктивного сопротивления ветви к квадрату полного сопротивления ветви.

Аналогично и ток второй ветви можно представить как состоящий из активной $I_{а2}$ и реактивной $I_{р2}$ составляющих:

$$\overline{I}_2 = \overline{I}_{а2(R_2)} + \overline{I}_{б2(C)} \text{ или } \overline{I}_2 = \overline{I}_{а2} + \overline{I}_{б2},$$

где

$$I_{а2} = I_2 \cos\varphi_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}} \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + X_c^2}} = U \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} = U g_2;$$

$g_2 = \dfrac{R_2}{R_2^2 + X_C^2}$ – активная проводимость второй ветви, См;

$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное (емкостное) сопротивление второй ветви, Ом;

$$I_{\text{р}2} = I_2 \sin\varphi_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}} \frac{X_C}{\sqrt{R_1^2 + X_C^2}} = U \frac{\dfrac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = Ub_C.$$

Активная составляющая тока в неразветвленной части цепи $I_{\text{а}}$ равна сумме активных составляющих токов первой $I_{\text{а}1}$ и второй $I_{\text{а}2}$ ветвей (обе составляющие совпадают по фазе с напряжением):

$$I_{\text{а}} = I_{\text{а}1} + I_{\text{а}2} = U(g_1 + g_2).$$

Реактивная составляющая тока первой ветви отстает по фазе от напряжения на 90°, а второй – опережает на 90°, т. е. ветви находятся в противофазе. Следовательно, реактивная составляющая тока в неразветвленной части цепи равна разности реактивных составляющих:

$$I_{\text{р}} = I_{\text{р}2(C)} - I_{\text{р}1(L)} \text{ или } I_{\text{р}} = I_{\text{р}2} - I_{\text{р}1} = (b_C - b_L)U = bU.$$

Действующее значение полного тока в неразветвленной части цепи можно определить как

$$I = \sqrt{I_{\text{а}}^2 + I_{\text{р}}^2} = U\sqrt{g^2 + b^2} = UY,$$

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2}, \tag{10.14}$$

где Y – полная проводимость цепи, См.

Активная, *реактивная* и *полная проводимости* измеряются в сименсах (См).

На основании выражения (10.14) можно построить треугольник проводимостей (рис. 10.10), из которого получают ряд соотношений: $g = Y\cos\varphi$; $b = Y\sin\varphi$; $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{g}$ и др.

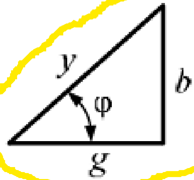

Рис. 10.10. Треугольник проводимостей

Если реактивная составляющая $I_р = I_{р2(C)} - I_{р1(L)}$, то при $I_{р1} > I_{р2}$ полный ток I будет отставать по фазе от напряжения на угол φ ($-90° \leq \varphi \leq 0$). Если $I_{р1} < I_{р2}$, то полный ток будет опережать по фазе напряжение на угол, который может иметь значения φ ($0 \leq \varphi \leq 90°$).

Особое внимание заслуживает тот случай, когда $I_{р1} = I_{р2}$, т. е. реактивная составляющая полного тока равна нулю. В этом случае в цепи наблюдается резонанс токов.

Пример 10.1. Определить токи в ветвях электрической цепи (рис. 10.11), если $U = 100$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 4$ Ом, $X_L = 8$ Ом, $X_C = 3$ Ом.

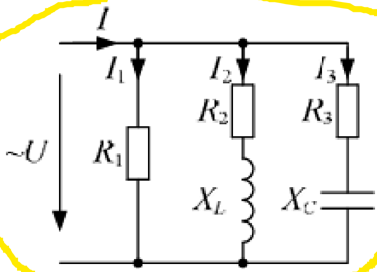

Рис. 10.11

Решение. Токи в параллельных ветвях определяем по закону Ома для участка электрической цепи:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{100}{10} = 10 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}} = \frac{100}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 10 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U}{\sqrt{R_3^2 + X_C^2}} = \frac{100}{\sqrt{4^2+3^2}} = 20 \text{ А.}$$

Ток I в неразветвленной части цепи определяем по закону Ома для цепи: $I = UY$. Здесь $Y = \sqrt{g^2 + b^2}$.

Активная проводимость g цепи, равная арифметической сумме активных проводимостей параллельных ветвей g_1, g_2, g_3:

$$g_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \text{ См;}$$

$$g_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_L^2} = \frac{6}{6^2+8^2} = 0{,}06 \text{ См;}$$

$$g_3 = \frac{R_3}{R_3^2 + X_C^2} = \frac{4}{4^2+3^2} = 0{,}16 \text{ См;}$$

$$g = g_1 + g_2 + g_3 = 0{,}1 + 0{,}06 + 0{,}16 = 0{,}32 \text{ См.}$$

Реактивная проводимость b цепи равна алгебраической сумме реактивных проводимостей параллельных ветвей. В первой ветви отсутствует реактивное сопротивление, значит, $b_1 = 0$. Тогда

$$b = b_3 - b_2;$$

$$b_2 = \frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2} = \frac{8}{6^2+8^2} = 0{,}08 \text{ См;}$$

$$b_3 = \frac{X_C}{R_3^2 + X_C^2} = \frac{3}{4^2+3^2} = 0{,}12 \text{ См;}$$

$$b = b_3 - b_2 = 0{,}12 - 0{,}08 = 0{,}04 \text{ См.}$$

Полная проводимость

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{0{,}32^2 + 0{,}04^2} = 0{,}322 \text{ См.}$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I = UY = 100 \cdot 0{,}322 = 32{,}2 \text{ А.}$$

Решим задачу в комплексном виде.

Ток $\underline{I}_1 = \underline{U} / R_1$ =100 / 10 = 10 А.

Комплексное сопротивление $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_L = 6 + j8 \Rightarrow 10e^{j53{,}1^\circ}$ Ом.

Ток второй ветви $\underline{I}_2 = \underline{U} / \underline{Z}_2 = 100 / 10e^{j53{,}1^\circ} = 10e^{-j53{,}1^\circ} = 6 - j8$ А.

Комплексное сопротивление $\underline{Z}_3 = R_3 - jX_C$ = 4 – j3 => $5e^{-j36,9^o}$ Ом.

Ток третьей ветви $\underline{I}_3 = \underline{U} / \underline{Z}_3$ = 100 / $5e^{-j36,9^o}$ = $20e^{j36,9^o}$ = 16 + j12 А.

Суммарный ток $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ = 10 + 6 – j 8 + 16 + j12 = 32 + j 4 => $32,25e^{j7,1^o}$ А.