

## 77-78 Электрические цепи со взаимной индуктивностью

### 12.1. Понятие об индуктивно связанных цепях

Электрические цепи, в которых изменение тока в одной из ветвей может вызвать появление ЭДС в другой ветви, называют *индуктивно связанными* или *цепями со взаимной индукцией*. Возникающую в этом случае ЭДС называют ЭДС взаимной индукции (взаимоиндукции).

Рассмотрим две катушки, расположенные на некотором расстоянии друг от друга (рис. 12.1).

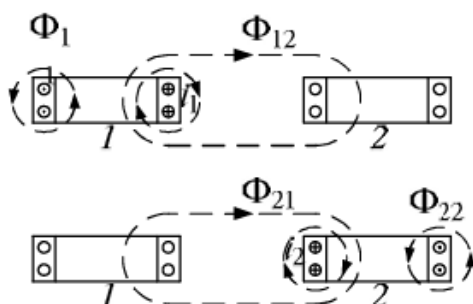


Рис. 12.1. Магнитная связь между двумя катушками

Пусть по обмотке первой катушки протекает ток  $i_1$ , в результате возникает магнитный поток, часть которого  $\Phi_{11}$  будет связана с витками первой катушки (контура), часть магнитного потока  $\Phi_{12}$  пронизывает витки второй катушки.

Потокосцепление первой катушки со второй  $\Psi_{12}$  в случае неферромагнитной среды

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12},$$

где  $N_2$  – число витков второй катушки.

Если по обмотке второй катушки проходит ток  $i_2$ , то создается магнитный поток, часть которого  $\Phi_{21}$  будет пронизывать витки обмотки первой катушки и образует **потокосцепление  $\Psi_{21}$** :

$$\Psi_{21} = N_1 \Phi_{21},$$

где  $N_1$  – число витков первой катушки.

Отношение потокосцепления второго контура (катушки)  $\Psi_{12}$  к силе тока, возбуждающего это потокосцепление  $i_1$ , называют **взаимной индуктивностью контуров**:

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1}.$$

Аналогично

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2}.$$

Для двух контуров всегда имеет место **равенство** на основании **принципа взаимности**, а именно:  **$M_{12} = M_{21} = M$** , поэтому необходимость в написании индексов отпадает.

**Взаимная индуктивность** измеряется в генри (Гн).

Магнитный поток взаимной индукции является частью потока одного из контуров, поэтому взаимная индуктивность, как и индуктивность, зависит от свойств материалов магнитной цепи, геометрических параметров, числа витков обмоток катушек, а также от их взаимного расположения.

**Магнитная связь между двумя контурами характеризуется коэффициентом связи.**

Отношение потока  $\Phi_{12}$  ко всему потоку  $\Phi_{11}$

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{11}} = \frac{\Psi_{12}}{N_2} = \frac{\Psi_{11}}{N_1} = \frac{\Psi_{12} N_1}{\Psi_{11} N_2} = \frac{M i_1 N_1}{L_1 i_1 N_2} = \frac{M N_1}{L_1 N_2}, \quad (12.1)$$

Аналогично

$$\frac{\Phi_{21}}{\Phi_{22}} = \frac{M N_2}{L_2 N_1}, \quad (12.2)$$

где  $L_1, L_2$  – индуктивность первой и второй катушек.

Каждое из отношений (12.1), (12.2) показывает, какая часть магнитного потока, созданного током одной катушки, сцепляется с другой.

Среднее геометрическое этих отношений представляет собой коэффициент или степень индуктивной связи  $K$  двух катушек (см. также п. 5.9):

$$\sqrt{\frac{\Phi_{12}\Phi_{21}}{\Phi_{11}\Phi_{22}}} = \sqrt{\frac{M^2 N_1 N_2}{L_1 L_2 N_2 N_1}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = K.$$

Поскольку магнитный поток  $\Phi_{11}$  больше магнитного потока  $\Phi_{12}$ , а  $\Phi_{22}$  больше магнитного потока  $\Phi_{21}$ , то коэффициент связи всегда меньше единицы:  $K < 1$ .

В некоторых случаях коэффициент связи приближается к единице, например у трансформаторов с замкнутым стальным магнитопроводом.

Устройство, дающее возможность изменять магнитную связь двух катушек, называется *вариометром*. Он представляет собой две катушки, из которых одна может поворачиваться. Магнитная связь таких катушек будет зависеть от взаимного расположения катушек или от способов их соединений.

## 12.2. Взаимоиндуктивное сопротивление

При наличии двух индуктивно связанных катушек  $L_1$  и  $L_2$  каждая из них будет пронизываться двумя магнитными потоками: самоиндукции, вызванным собственным током, и взаимной индукции, вызванным током другой катушки. Следовательно, в каждой катушке индуцируются две ЭДС: самоиндукции  $e_L$  и взаимной индукции  $e_M$ .

В первой катушке

$$e_1 = e_{L_1} + e_{M_1} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \quad (12.3)$$

во второй катушке

$$e_2 = e_{L_2} + e_{M_2} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \quad (12.4)$$

Знак «+» или «-» в выражениях (12.3), (12.4) зависит от взаимного направления потоков самоиндукции и взаимоиндукции.

Если потоки самоиндукции и взаимоиндукции совпадают по направлению, ставят знак «-», если противоположны – знак «+».

Явление взаимоиндукции учитывают в расчете реальных электрических цепей при наличии в них индуктивно связанных катушек.

Абсолютное значение напряжения, уравнивающее соответствующую ЭДС взаимоиндукции:

$$u_M = \left| M \frac{di}{dt} \right|,$$

или в комплексной форме:

$$\dot{U}_M = \left| j\omega M \dot{I} \right|,$$

где  $\omega M = X_M$  – реактивное сопротивление взаимоиндукции;

$j\omega M = \underline{Z}_M$  – комплексное сопротивление взаимоиндукции.

### 12.3. **Согласное и встречное включение катушек**

Для определения знака перед напряжением необходимо предварительно **определить, как включены катушки: согласно или встречно**. Правильное заключение об этом можно сделать, если известны **направление намотки** обмоток катушек на сердечник и **направление тока** в этих обмотках.

Два вывода, принадлежащих двум разным катушкам, называют *одноименными*, если при одинаковом направлении токов относительно них магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции совпадают.

Если к выводам *a* и *c* двух катушек (рис. 12.2) подвести токи  $i_1$  и  $i_2$  одного направления, то в этом случае потокоцепление второй катушки с первой  $\Psi_{21}$  будет совпадать по направлению с потокоцеплением  $\Psi_{11}$  первой катушки, следовательно, зажимы *a* и *c* считают одноименными (начало обмоток). Одноименными в таком случае будет и вторая пара зажимов *b* и *d* (концы обмоток).

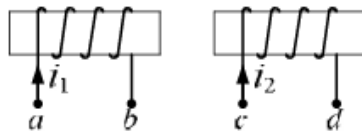


Рис. 12.2. Индуктивно связанные катушки

Обычно на схемах электрических цепей сердечники не изображают, а одноименные зажимы (начало обмоток) помечают точками или звездочками (рис. 12.3).

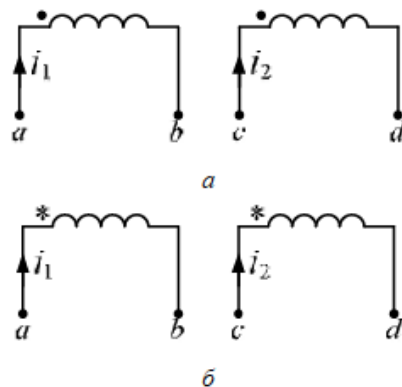


Рис. 12.3. Примеры обозначения одноименных зажимов катушек:  
*a* – точками; *б* – звездочками

Индуктивно связанные элементы включены согласно, если направления магнитного потока самоиндукции и магнитного потока взаимной индукции совпадают. При этом возрастает результирующий поток, сцепляющийся с катушкой. Это имеет место тогда, когда токи в двух катушках одинаково ориентированы относительно одноименных зажимов (рис. 12.4, *a*).

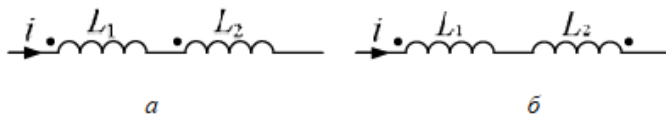


Рис. 12.4. Схемы последовательного включения катушек:  
*a* – согласно; *б* – встречно

Если магнитный поток взаимной индукции направлен навстречу магнитному потоку самоиндукции, ослабляет его, такое включение индуктивно связанных элементов называют встречным. В таком случае токи в двух катушках должны быть ориентированы к разным зажимам (рис. 12.4, б).

Если в цепи будет несколько магнитно-связанных катушек, то начало и конец обмоток различают для каждой пары отдельно. Начала и концы обмоток можно определить экспериментально.

Расчет электрических цепей с индуктивно связанными катушками производят символическим методом. При этом используют метод уравнений Кирхгофа или метод контурных токов.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа учитывают падение напряжения от взаимной индукции с соответствующим знаком.

Если включение двух катушек согласное, падение напряжения от взаимной индукции берут с тем же знаком, что и падение напряжения от самоиндукции, при встречном включении – наоборот.

#### **12.4. Расчет электрических цепей с взаимной индуктивностью, последовательное соединение**

Для расчета цепей с индуктивно связанными элементами **нельзя воспользоваться законом Ома**, так как падение напряжения на ветви, индуктивно связанной с другой ветвью электрической цепи, зависит от токов в этих ветвях. В таких цепях непосредственно применимы только законы Кирхгофа и метод контурных токов, при этом используется комплексная форма записи законов.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует учитывать на индуктивно связанных элементах падение напряжения взаимоиндукции:  $\dot{U}_M = j\omega M\dot{I}$ .

Знак «+» или «-» при  $\dot{U}_M$  определяется правилом знаков: если включение двух катушек согласное, падение напряжения от взаимной индукции берут с тем же знаком, что и падение напряжения от самоиндукции, при встречном включении – знак меняется на противоположный.

Расчет цепи с индуктивно связанными катушками рассмотрим на примере их последовательного соединения. Две последователь-

но соединенные индуктивно связанные катушки могут иметь согласное или встречное включение.

При согласном включении (рис. 12.5) на основании второго закона Кирхгофа имеем уравнение для мгновенных значений токов и напряжений:

$$iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + iR_2 + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = u,$$

или в комплексной форме:

$$\dot{i}R_1 + j\omega L_1 \dot{i} + j\omega M \dot{i} + \dot{i}R_2 + j\omega M \dot{i} + j\omega L_2 \dot{i} = \dot{U}, \quad (12.5)$$

где  $j\omega L_1 \dot{i}$ ,  $j\omega L_2 \dot{i}$  – соответственно комплексные напряжения самоиндукции в каждой катушке;

$j\omega M \dot{i}$  – комплексное напряжение взаимной индукции;

$\omega M = X_M$  – сопротивление взаимной индукции;

$j\omega M = jX_M = \underline{Z}_M$  – комплексное сопротивление взаимной индукции.

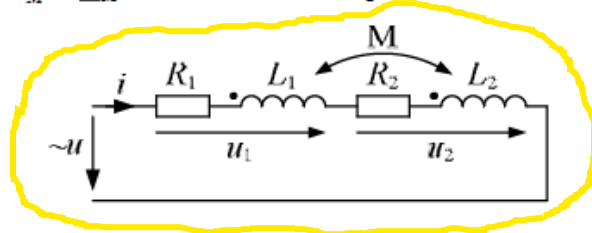


Рис. 12.5. Схема согласного включения индуктивно связанных катушек

Из уравнения (12.5) следует, что ток в электрической цепи

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)}, \quad (12.6)$$

где  $R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = \underline{Z}_c$  – эквивалентное комплексное сопротивление цепи при согласном включении катушек;

$L_1 + L_2 + 2M = L_c$  – эквивалентная индуктивность двух катушек при согласном включении.

Уравнение (12.6) проиллюстрируем с помощью векторной диаграммы (рис. 12.6), приняв за базовый вектор тока  $\dot{I}$ .

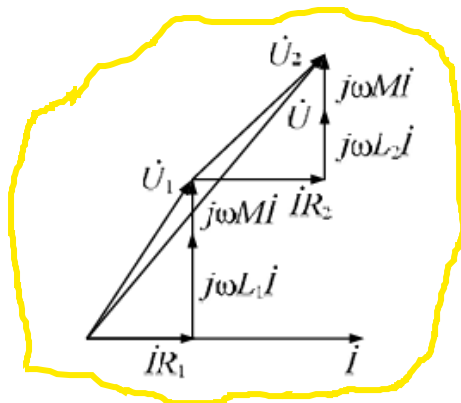


Рис. 12.6. Векторная диаграмма тока и напряжений при согласном включении двух индуктивно связанных катушек

### Напряжение на первой катушке

$$\dot{U}_1 = \dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I};$$

### напряжение на второй катушке

$$\dot{U}_2 = \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I}.$$

При встречном включении катушек (рис. 12.7) на основании второго закона Кирхгофа имеем равенство

$$iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + iR_2 + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = u,$$

или в комплексной форме:

$$\dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = \dot{U}. \quad (12.7)$$

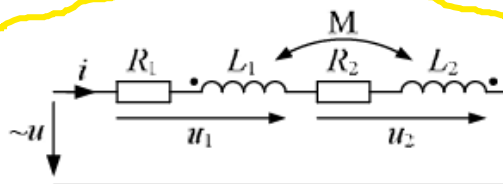


Рис. 12.7. Встречное включение двух катушек



Из уравнения (12.7) следует

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)}, \quad (12.8)$$

где  $R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) = \underline{Z}_B$  – эквивалентное комплексное сопротивление цепи при встречном включении катушек;

$L_1 + L_2 - 2M = L_B$  – эквивалентная индуктивность цепи при встречном включении катушек.

Уравнению (12.8) соответствует **векторная диаграмма** (рис. 12.8).

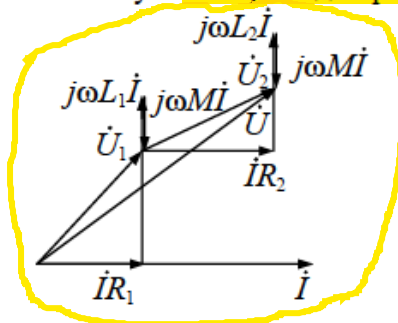


Рис. 12.8. **Векторная диаграмма** тока и напряжений при встречном включении двух индуктивно связанных катушек

**Напряжение на первой катушке**

$$\dot{U}_1 = \dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I};$$

**напряжение на второй катушке**

$$\dot{U}_2 = \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I}.$$

Из выражений (12.6), (12.8)  $L_c > L_B$ , следовательно,  $\underline{Z}_c > \underline{Z}_B$ , что можно использовать при определении одноименных зажимов катушек и взаимной индуктивности.

**Пример 12.1.** Две индуктивно связанные катушки с выводами  $ab$  и  $cd$  соединены, как показано на рисунке 12.9. Катушки имеют следующие параметры:  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_1 = 6 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_2 = 4 \text{ Ом}$ ;  $\omega M = 1 \text{ Ом}$ . Напряжение питания  $\dot{U} = 100 \text{ В}$ . Определить ток и напряжения на выводах катушек  $U_{ab}$ ,  $U_{cd}$  и построить векторную диаграмму тока и напряжений.

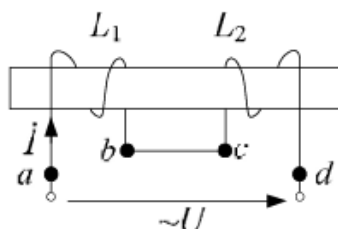


Рис. 12.9. Индуктивно связанные последовательно соединенные катушки

**Решение.** Проследив по рисунку 12.9 прохождение тока по виткам обеих катушек и применив правило правогоходавого винта, видим, что магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции катушек направлены навстречу друг другу, таким образом, катушки включены встречно. Заданная цепь может быть представлена схемой, показанной на рисунке 12.10.

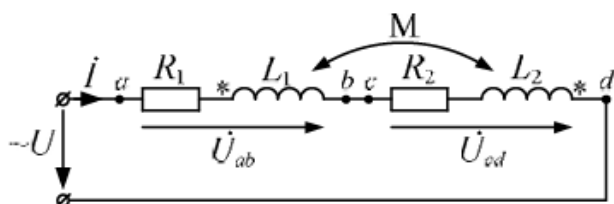


Рис. 12.10. Схема соединения двух индуктивно связанных катушек

Запишем уравнение второго закона Кирхгофа:

$$\dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega \dot{I} + \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = \dot{U}.$$

Искомый ток

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 - j2\omega M} = \frac{100}{6 + j10 - j2} = \frac{100}{6 + j8} = 6 - j8 \text{ A};$$

$$I = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ A}.$$

Напряжение на первой катушке по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = (6 - j8)(2 + j6 - j) = (6 - j8)(2 + j5) = 52 + j14 \text{ В};$$

$$U_{ab} = \sqrt{52^2 + 14^2} = 53,9 \text{ В}.$$

Напряжение на второй катушке

$$\dot{U}_{cd} = \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = (6 - j8)(4 + j4 - j) = (6 - j8)(4 + j3) = 48 - j14 \text{ В};$$

$$U_{cd} = \sqrt{48^2 + 14^2} = 50 \text{ В}.$$

На рисунке 12.11 представлена векторная диаграмма. По действительной оси отложен вектор напряжения  $\dot{U}$ , вектор тока  $\dot{I}$  отстает от напряжения. Падение напряжения на активном сопротивлении первой катушки  $\dot{I}R_1$  совпадает по фазе с током  $\dot{I}$ , падение напряжения на индуктивности первой катушки  $j\omega L_1 \dot{I}$  опережает ток  $\dot{I}$  по фазе на  $90^\circ$ , падение напряжения взаимной индукции  $j\omega M \dot{I}$  отстает от тока  $\dot{I}$  по фазе на  $90^\circ$ .

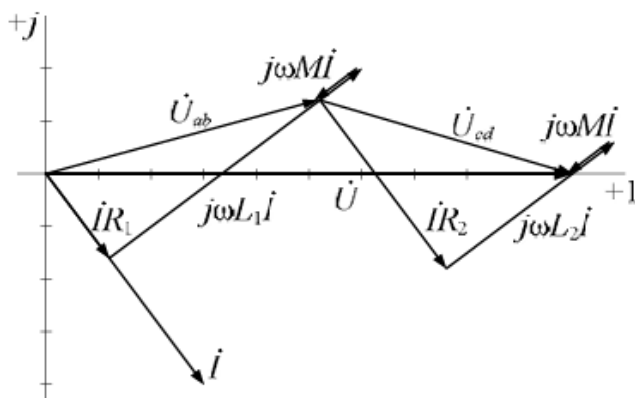


Рис. 12.11. Векторная диаграмма тока и напряжений

Сумма векторов этих напряжений дает напряжение на первой катушке  $\dot{U}_{ab}$ . Аналогично проводят векторы падений напряжений второй катушки.



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Поясните, какие электрические цепи называют индуктивно связанными.
2. Дайте определение взаимной индуктивности и поясните, от чего зависит ее величина.

3. Запишите, чему равен коэффициент связи двух индуктивно связанных катушек.

4. Запишите, чему равна ЭДС взаимной индукции.

5. Объясните, что понимают под согласным и встречным включением двух индуктивно связанных катушек.

6. В каком случае энергия, запасенная в магнитном поле двух последовательно включенных катушек, больше при согласном или при встречном включении и почему? Ответ: при встречном.

7. Определите взаимную индуктивность двух катушек, включенных последовательно, если при встречном включении их общая индуктивность  $L = 12$  мГн, а при согласном  $L = 62$  мГн. Ответ:  $M = 12,5$  мГн.

8. Взаимная индуктивность двух контуров  $M = 2,2$  мГн. Потокосцепление первого контура со вторым  $\Psi_{12} = 1,45 \cdot 10^{-2}$  Вб. Определите ток во втором контуре. Ответ:  $I_2 = 6,6$  А.