105-106 Переходные процессы в электрических цепях с индуктивностью

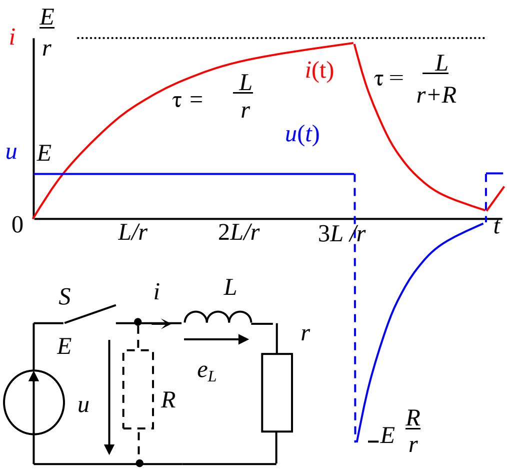

Рисунок 1 Графики напряжения и тока при подключении и отключении *L r* катушки

Рассмотрим процесс подключения индуктивной катушки к источнику ЭДС.

Катушка представлена в виде индуктивности *L* и сопротивления проводов обмотки *r*, соединённых последовательно (рис. 1).

Появление и нарастание тока *i* в катушке создаёт электродвижущую силу (ЭДС) самоиндукции $e_L = -Ldi/dt$. Знак «–» говорит о том, что ЭДС самоиндукции направлена навстречу нарастающему току, затрудняет его увеличение, забирая энергию и накапливая её в магнитном поле катушки. При изменении магнитного поля, в сердечнике катушки наводятся вихревые токи, что учитывается в виде эквивалентного резистора *R*, соединённого параллельно с катушкой.

По 2 закону Кирхгофа напряжение на резисторе равно сумме ЭДС

$$r\,i = E + e_L = E - Ldi/dt.$$

Характеристическое уравнение $r = -Lp$, его корень $p = -r/L$, постоянная времени нарастания тока $\tau = L/r$, решение ищем в виде

$$i = Ae^{-t/\tau} + const.$$

Принуждённое значение силы тока равно E/r, следовательно

$$const = E/r.$$

Начальное значение силы тока равно нулю, $0 = A + E/r$, значит

$$A = -E/r.$$

Ток катушки плавно нарастает от 0 до E/r с постоянной времени $\tau = L/r$.

$$i = E/r - (E/r)\,e^{-rt/L} = (E/r)\,(1 - e^{-t/\tau}).$$

Напряжение ***u*** на катушке скачком возрастает до ЭДС источника *E*.

Отключение индуктивной катушки *Lr* от источника ЭДС *E*

Начальное значение тока катушки равно E/r. При отключении катушки ток не может мгновенно упасть до нуля. Уменьшение тока, а значит магнитного потока, создаёт ЭДС самоиндукции $e_L = -L di/dt$, которая поддерживает убывающий ток. Так как контакты разомкнуты, энергия, запасённая в магнитном поле катушки, посредством вихревых токов, нагревает сердечник и другие металлические детали, что учтено в виде эквивалентного резистора R. Для облегчения процесса рассеяния энергии сердечники устройств постоянного тока делают сплошными, из технически чистого железа, обладающего хорошей электропроводностью (армко-железо).

Тем не менее, при использовании массивных сердечников, ЭДС самоиндукции способна поддерживать ток между размыкающимися контактами в виде электрической дуги, расплавляя эти контакты. Обрыв тока в индуктивной катушке вызывает импульс перенапряжения, который может пробить изоляцию, пережечь обмотки измерительных приборов, ударить человека. Импульсы коммутационных перенапряжений используют для зажигания газосветных ламп, сварочной дуги, топливных смесей в двигателях внутреннего сгорания, в электрошокерах и т. п.

Напряжение на резисторах равно ЭДС самоиндукции $(r + R)\, i = -L\, di/dt$.

Характеристическое уравнение $r+R = -Lp$; корень $p = -(r+R)/L$; $\tau = L/(r+R)$.

Решение уравнения ищем в виде $i = Ae^{-t/\tau} + const$.

Принуждённое значение силы тока равно 0, следовательно, $const = 0$.

Начальное значение силы тока равно $E/r = A + 0$, значит $A = E/r$.

Ток катушки уменьшается от E/r до 0 с постоянной времени $\tau = L/(r+R)$

$$i = (E/r)\, e^{-t/\tau}.$$

Пик перенапряжения на катушке u больше ЭДС источника E в R/r раз

$$u = -R\, i = -(E\, R/r)\, e^{-t/\tau}.$$

Для борьбы с перенапряжением на сердечник устанавливают замкнутые медные кольца или гильзу, что уменьшает эквивалентное сопротивление R, увеличивает постоянные времени и затягивает процессы изменения тока. Можно шунтировать индуктивную катушку встречно-параллельным диодом *D*, это затянет только процесс спадания тока. На переменном токе перечисленные методы непригодны, для борьбы с коммутационными перенапряжениями применяют универсальный способ – демпфирующие *RC*-цепочки, состоящие из сглаживающих конденсаторов *C* и разрядных резисторов *R*.

Сглаживание пика перенапряжения с помощью *RC*-цепочки

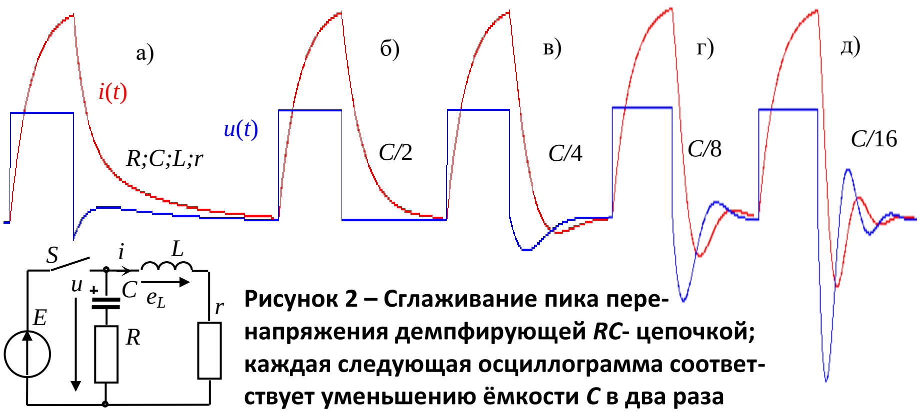

Рисунок 2 – Сглаживание пика перенапряжения демпфирующей *RC*- цепочкой; каждая следующая осциллограмма соответствует уменьшению ёмкости *C* в два раза

При обрыве тока в индуктивности *L* (рис. 2) конденсатор *C*, перезаряжаясь, поглощает часть накопленной в ней энергии, а затем, разряжаясь, отдаёт эту энергию резистору *R*, рассеивая в виде тепла. По 2 правилу Кирхгофа

$$u_C + e_L = (r + R)\, i.$$

Учтём что $e_L = -\,L di/dt$, а $i = -\,C du/dt$, после и преобразований получим

$$d^2u_C/dt^{\,2} + [(r + R) / L]\, du_C/dt + u_C / (LC) = 0.$$

Так как в цепи присутствуют два накопителя энергии, то процесс описывается дифференциальным уравнением второго порядка. Характеристическое уравнение

$$p^2 + [(r + R) /L]p + 1/(LC) = 0.$$

При решении характеристического уравнения получаем два корня

$$p_{1,2} = -(r + R)/2L \pm \sqrt{(r + R)^2/4L^2 - 1/LC}\,.$$

На осциллограммах рисунка 2 показаны графики изменения токов и напряжений при коммутации реле для случая, когда разрядный резистор R равен сопротивлению обмотки реле r, а ёмкость конденсатора C уменьшается в два раза при переходе к каждой следующей осциллограмме. Рассмотрим, как зависит характер переходного процесса от вида корней.

На осциллограммах 2*а* видно, что ёмкость конденсатора C слишком велика, и он, разряжаясь на индуктивность, затягивает процесс спадания тока. Это апериодический режим; решениями характеристического уравнения являются два разных действительных корня (обязательно отрицательных, так как процесс затухает). Свободные составляющие тока и/или напряжения представляют собой сумму двух экспонент с разными показателями, вида

$$A_1 e^{p1t} \pm A_2 e^{p2t}.$$

Осциллограммы 2*б* соответствуют критическому режиму, когда сопротивление равно $2\sqrt{L/C}$, характеристическое уравнение имеет один действительный корень, в нашем случае $p = -(r + R) / 2L$. Выражение вида $\Sigma R / 2L$ называют коэффициентом затухания и обозначают буквой α, таким образом $p = \alpha$.

Свободные составляющие тока и/или напряжения представляют собой экспоненты вида $(A_1 \pm A_2 t)e^{-\alpha t}$.

Осциллограммы 2*в,г,д* представляют собой затухающие синусоиды вида

$$Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t+\psi).$$

Эти синусоиды получаются при сложении экспонент с комплексно сопряжёнными показателями

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\omega$$

в соответствии с формулами Эйлера и описывают колебания энергии между ёмкостью C и индуктивностью L; затухание колебаний α определяется действительной частью комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения, а частота колебаний ω – мнимой. С уменьшением ёмкости *C* пик обратного напряжения возрастает, а главное, появляется явно выраженная волна тока прямого направления (рис 2*д*), которая может привести, например, к дребезгу контактов в момент выключения реле.

Полностью избавиться от пика обратного напряжения можно, если параллельно катушке подключить полупроводниковый диод *VD* так, чтобы обеспечить путь току после размыкания контактов *S* (рис.3). При этом обратное напряжение катушки не превышает напряжения на открытом *p-n* переходе (для кремниевых диодов около 1 В), а постоянная времени спадания тока τ = *L/r*. На рисунке 3 показаны слева осциллограммы тока и напряжения с диодом, а справа – без него.

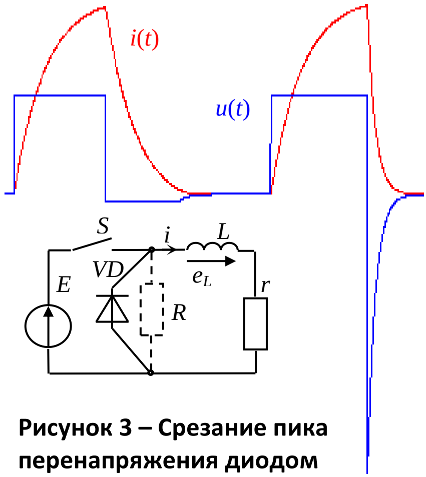

Рисунок 3 – Срезание пика перенапряжения диодом

Исследование колебаний тока и напряжения в процессе разрядки конденсатора на катушку индуктивности

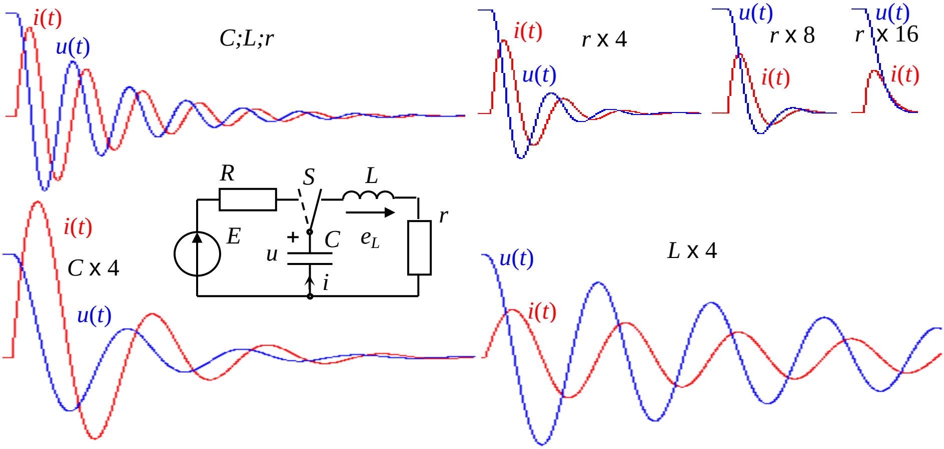

Рисунок 4 – Процессы разрядки конденсатора на катушку индуктивности; зависимость колебаний тока и напряжения от параметров элементов схемы

Зарядим конденсатор C до напряжения, равного ЭДС источника E (рис.4), а затем подключим к катушке индуктивности L, намотанной проводом с сопротивлением r. Так как принуждённые составляющие равны 0, ток и напряжение имеют вид синусоид, затухающих по экспоненте

$$i = I e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi_I); \qquad u = U e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi_U).$$

Собственная (резонансная) частота колебательного контура равна $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$; коэффициент затухания $\alpha = r / 2L$; частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$; критическое сопротивление равно $2\sqrt{L/C}$.

Из начальных условий, используя законы коммутации, можно рассчитать коэффициенты при экспонентах и начальные фазы колебаний

$$\psi_I = 0; \quad I = E/\omega L; \quad \psi_U = \arccos(\alpha/\omega_0); \quad U = E\omega_0/\omega; \quad \varphi = \psi_U - \psi_I,$$

следовательно $i = E/\omega L \, e^{-\alpha t} \sin\omega t$; $u = E\omega_0/\omega \, e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$.

При малом сопротивлении r коэффициент затухания тоже мал, частота колебаний ω близка к собственной частоте колебательного контура ω_0, сдвиг фаз ф между током и напряжением близок к четверти периода (осциллограмма рисунка 4 вверху слева).

С увеличением сопротивления r (осциллограммы вверху справа) растёт коэффициент затухания α, синусоиды всё круче «сжимаются» экспонентами, частота колебаний ω и сдвиг фаз φ несколько уменьшаются. Для наглядного представления замедления колебаний при увеличении коэффициента затухания вполне уместна аналогия с лёгким маятником, помещённым в плотный газ. Когда сопротивление достигает критического значения (крайняя правая осциллограмма вверху), переходный процесс становится апериодическим.

Увеличение ёмкости C (осциллограмма слева внизу) приводит к уменьшению частоты колебаний ω (они растягиваются, не изменяя коэффициент затухания α); одновременно возрастает сила тока I.

Увеличение индуктивности L (осциллограмма справа внизу) растягивает колебания, их частота ω и коэффициент затухания α уменьшаются, одновременно снижается сила тока I.