## 96 Действующие значения несинусоидальных токов, ЭДС и напряжений

О значениях периодических несинусоидальных токов, напряжений и ЭДС судят по их действующим значениям. Действующее значение периодического несинусоидального тока есть среднее квадратичное значение этого тока за период $T$:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}.$$

Раскладывая $i(t)$ в ряд Фурье, имеем

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T (i_0 + i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots)^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T i_k^2 dt + \sum_{\substack{q=0 \\ s=0}}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T i_q i_s dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T i_k^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots ,$$

так как при $q \neq s$

$$\int_0^T i_q i_s dt = \int_0^T I_{mq} I_{ms} \sin(q\omega t + \psi_q)\sin(s\omega t + \psi_s) dt =$$

$$= \frac{1}{2} I_{mq} I_{ms} \int_0^T \{\cos[\omega t(q-s)+\psi_q-\psi_s] - \cos[\omega t(q+s)+\psi_q+\psi_s]\} dt = 0.$$

Действительно, при $q \neq s$ мы получаем интегралы от косинусоидальных функций времени за целое число $(q-s)$ и $(q+s)$ периодов. Такие интегралы равны нулю.

Итак, имеем

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots},$$

т. е. действующее значение периодического несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений всех гармоник.

Аналогично находим действующие значения несинусоидальных напряжений и ЭДС:

$$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \text{ и } E = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} E_k^2}.$$

**Пример 16.1.** Определить действующее значение несинусоидального напряжения, заданного следующим выражением:

$$u(t) = 100 + 80 \sin(\omega t + 30°) + 60 \sin(3\omega t + 20°) + 50 \sin(5\omega t + 45°).$$

**Решение.** Анализ заданного в виде тригонометрического ряда напряжения показывает, что это выражение содержит нулевую, первую, третью и пятую гармоники. Тогда действующее значение несинусоидального напряжения

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \sqrt{100^2 + \left(\frac{80}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2} = 127 \text{ В}.$$

# Мощность в цепи несинусоидального тока

Активная мощность периодического тока произвольной формы определяется как средняя мощность за период $P$:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt.$$

Если мгновенные значения напряжения и тока выразить в виде тригонометрических рядов, то получим

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_{m_k} \sin(k\omega t + \psi_{u_k})\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} I_{m_k} \sin(k\omega t + \psi_{i_k})\right] dt.$$

Так как среднее за период произведение мгновенных значений синусоид различной частоты равно нулю (см. п. 16.4) и тригонометрические ряды абсолютно сходятся при любых частотах $\omega$, то

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} U_{m_k} I_{m_k} \sin(k\omega t + \psi_{u_k}) \sin(k\omega t + \psi_{i_k})\, dt,$$

или после интегрирования

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{m_k} I_{m_k} \cos\varphi_k}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k, \qquad (16.5)$$

где $\varphi_k = \psi_{u_k} - \psi_{i_k}$.

Из выражения (16.5) следует вывод: активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник (постоянная составляющая рассматривается как нулевая гармоника с $\varphi_0 = 0$):

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k.$$

Активная мощность $P$ представляет собой энергию электрической цепи, необратимо преобразуемую в другие виды энергии, в основном тепловую и механическую. Поэтому активную мощность несинусоидального тока можно рассчитать по закону Джоуля – Ленца:

$$P = RI^2$$

Кроме понятия активной мощности $P$, по аналогии с синусоидальными токами вводится понятие полной мощности $S$, определяемой как произведение действующих значений тока и напряжения:

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}.$$

Активная мощность меньше полной, исключение составляет только мощность в цепи, сопротивление которой чисто активное, т. е. $U_k = RI_k$ и, следовательно, $S = P$.

Отношение активной мощности к полной называют *коэффициентом мощности* и иногда приравнивают к косинусу некоторого условного угла $\theta$:

$$\cos\theta = \frac{P}{S}.$$

Формально можно ввести понятие реактивной мощности, определяемой как сумма реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin\varphi_k.$$

Для несинусоидальных токов, в отличие от синусоидальных, квадрат полной мощности обычно больше суммы квадратов активной и реактивной мощностей:

$$S^2 \geq P^2 + Q^2$$