15 Расчёт электрических цепей методом эквивалентных сопротивлений (метод свёртывания цепи)

Метод эквивалентных сопротивлений применяется для расчета таких электрических цепей, в которых имеются пассивные элементы (резисторы), включенные между собой последовательно, параллельно или по смешанной схеме.

На рисунке 4.7, *а* представлена схема электрической цепи со смешанным соединением резисторов. Между зажимами «+» и «–» находится источник энергии, создающий напряжение U.

При рассмотрении электрических цепей с одним источником энергии источник ЭДС E не изображают, так как в практической электротехнике обычно известны не ЭДС источников и их внутреннее сопротивление, а напряжение U, которое они создают в рабочем режиме.

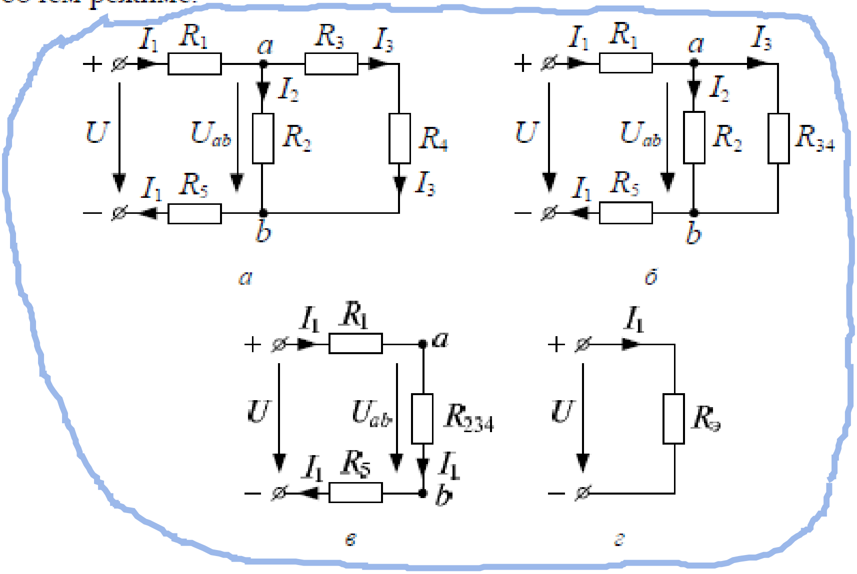


Рис. 4.7. Электрическая цепь со смешанным соединением приемников: *а* – исходная схема электрической цепи; *б* – схема цепи после преобразования; *в*, *г* – схемы эквивалентных неразветвленных электрических цепей

Рассматриваемая схема электрической цепи имеет два узла и три ветви. В каждой ветви идет свой ток, направления токов показаны от зажима «+» к зажиму «–» источника энергии. Обычно задача состоит в определении величин токов при заданных напряжении источника питания U и сопротивлениях приемников. Поскольку напряжение задано на входе цепи, т. е. общее, то в соответствии с законом Ома для расчета тока нужно иметь общее сопротивление всех приемников. Для нахождения общего, эквивалентного сопротивления приемников нужно использовать правила нахождения эквивалентных сопротивлений при последовательном и параллельном включении приемников.

Резисторы, включенные в одну ветвь, соединены последовательно, так как через них идет один и тот же ток, т. е. в схеме цепи (см. рис. 4.7, *а*) резисторы R_1 и R_5, а также R_3 и R_4 соединены последовательно. Существует негласное правило, по которому свертывание схемы электрической цепи нужно начинать с участков электрической цепи, наиболее удаленных от источника энергии, поэтому $R_3 + R_4 = R_{34}$.

После такой замены получается более простая схема (см. рис. 4.7, *б*). В этой схеме хорошо видно, что R_2 и R_{34} присоединены к одной паре узлов и, следовательно, эти резисторы соединены параллельно, их можно заменить одним (эквивалентным), определив его сопротивление по формуле, аналогичной (4.18):

$$R_{234} = \frac{R_2 R_{34}}{R_2 + R_{34}}.$$

Получаем более простую схему (рис. 4.7, *в*). В этой схеме резисторы R_1 и R_{234}, R_5 соединены последовательно, т. е. эквивалентное (общее) сопротивление электрической цепи

$$R_э = R_1 + R_{234} + R_5.$$

Подобные преобразования используют и в схемах с несколькими источниками энергии в разных ветвях, таким образом достигается упрощение, которое значительно облегчает расчет.

В простейшей цепи (рис. 4.7, *г*) ток I_1 определяют по закону Ома с использованием формулы (3.3):

$$I_1 = \frac{U}{R_э}.$$

Токи в других ветвях первоначальной схемы определяют, переходя от схемы к схеме в обратном порядке.

При эквивалентном преобразовании части схемы электрической цепи токи и напряжения остальных участков цепи не изменяются, поэтому по схеме рисунка 4.7, *в* видно, что по закону Ома

$$U_{ab} = I_1 R_{234}. \qquad (4.19)$$

Зная напряжение (4.19), находим по закону Ома токи (см. рис. 4.7, *б*):

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{ab}}{R_{34}}.$$

Для проверки расчета следует составить баланс мощностей:

$$UI_1 = I_1^2(R_1 + R_5) + I_2^2 R_2 + I_3^2(R_3 + R_4).$$

Напряжение U_{ab} после определения тока I_1 можно найти по второму закону Кирхгофа, используя левый контур первоначальной схемы электрической цепи (см. рис. 4.7, *а*) и обход контура по часовой стрелке:

$$I_1 R_1 + U_{ab} + I_1 R_5 - U = 0,$$

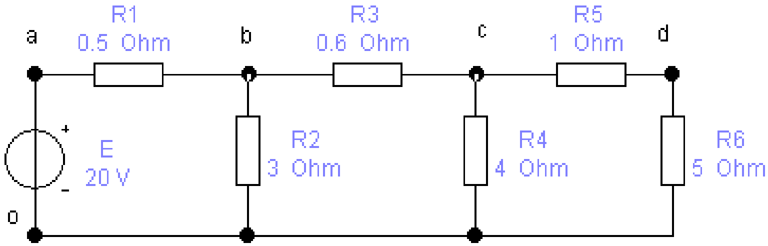
откуда

$$U_{ab} = U - I_1 R_1 - I_1 R_5.$$

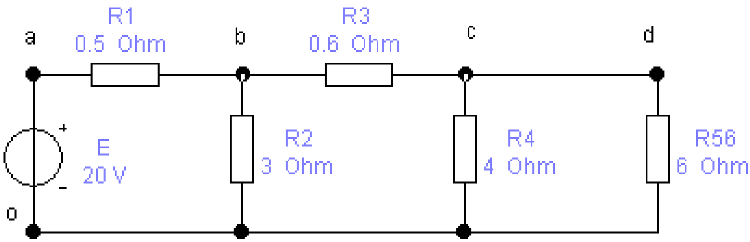
Следует отметить, что определение эквивалентного сопротивления требует определенных навыков и знаний, что значит параллельное соединение и что – последовательное. Кроме этих соединений, есть еще соединения трех резисторов звездой или треугольником, а также соединения, которые никак не называются и никак не преобразуются. Например, в схеме рисунка 4.7, *а* резисторы R_1 и R_2 соединены, но ни последовательно, так как между ними есть узел, ни параллельно, так как резистор R_2 присоединен к узлам *a* и *b*, а резистор R_1 – к узлу *a* и к зажиму «+» источника. То же происходит с резисторами R_2 и R_4, они не соединены параллельно, так как резистор R_4 присоединен к узлу *b* и к резистору R_3, а не к узлу *a*.

Токи I_2 и I_3 можно найти без определения Uab по формулам разброса.

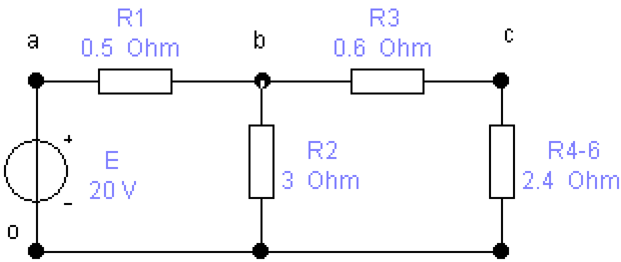
Пример. Рассчитать токи в цепи методом свёртывания.



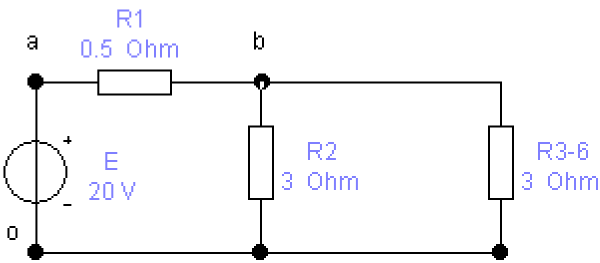
1 Сложим $R_5 + R_6 = 1 + 5 = 6$ Ом $= R_{56}$. Получим схему



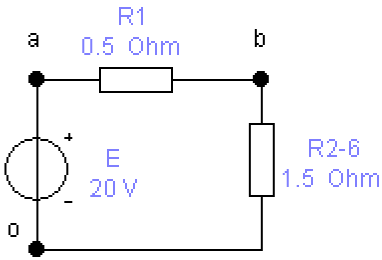
2 Определим эквивалентное сопротивление параллельно соединённых R_4 и R_{56}: $R_{4-6} = \dfrac{R_4 \cdot R_{56}}{R_4 + R_{56}} = \dfrac{4 \cdot 6}{4+6} = 2,4$ Ом. Получим схему



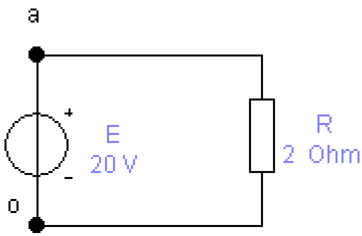
3 Сложим $R_3 + R_{4\text{-}6} = 0,6 + 2,4 = 3$ Ом $= R_{3\text{-}6}$. Получим схему



4 Определим эквивалентное сопротивление параллельно соединённых R_2 и $R_{3\text{-}6}$: $R_{2-6} = \dfrac{R_2 \cdot R_{3-6}}{R_2 + R_{3-6}} = \dfrac{3 \cdot 3}{3+3} = 1{,}5$ Ом. Получим схему



5 Сложим $R_1 + R_{2\text{-}6} = 0{,}5 + 1{,}5 = 2$ Ом $= R$



Определим ток источника и первого резистора: $I = I_1 = E / R = 20 / 2 = 10$ А.

Определим напряжение в точке *b*: $U_b = I_1 \cdot R_{2\text{-}6} = 10 \cdot 1{,}5 = 15$ В.

Определим ток второго резистора: $I_2 = U_b / R_2 = 15 / 3 = 5$ А.

Определим ток третьего резистора: $I_3 = U_b / R_{3\text{-}6} = 15 / 3 = 5$ А.

Определим напряжение в точке *c*: $U_c = I_3 \cdot R_{4\text{-}6} = 5 \cdot 2{,}4 = 12$ В.

Определим ток четвёртого резистора: $I_2 = U_c / R_4 = 12 / 4 = 3$ А.

Определим ток пятого и шестого резисторов: $I_5 = I_6 = U_c / R_{56} = 12 / 6 = 2$ А.

6 Токи можно рассчитать и без определения напряжений используя формулы разброса: $I_2 = I_1 \dfrac{R_{3-6}}{R_2 + R_{3-6}} = 10 \dfrac{1{,}5}{1{,}5+1{,}5} = 5$ А.

$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_{3-6}} = 10 \frac{1{,}5}{1{,}5+1{,}5} = 5 \text{ А.}$$

$$I_4 = I_3 \frac{R_{56}}{R_4 + R_{56}} = 5 \frac{6}{4+6} = 3 \text{ А.}$$

$$I_5 = I_6 = I_3 \frac{R_4}{R_4 + R_{56}} = 5 \frac{4}{4+6} = 2 \text{ А.}$$