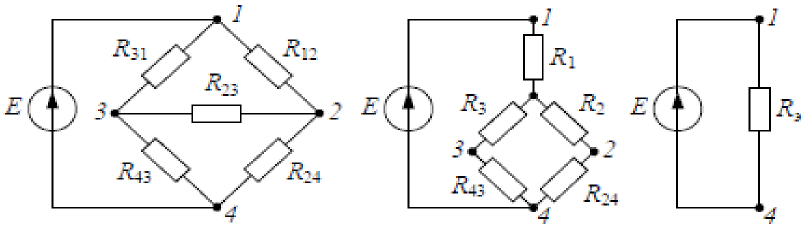
18 Преобразование треугольника сопротивлений в звезду

Во многих схемах электрических цепей можно выделить группы из трех резисторов, образующих треугольник или звезду сопротивлений.

В схеме электрической цепи (рис. 4.8, *а*) нет резисторов, соединенных последовательно или параллельно, но к узлам *1*, *2*, *3* присоединен треугольник резисторов R_{12}, R_{23}, R_{31}, а к узлам *2*, *4*, *3* – треугольник R_{24}, R_{43}, R_{23}.

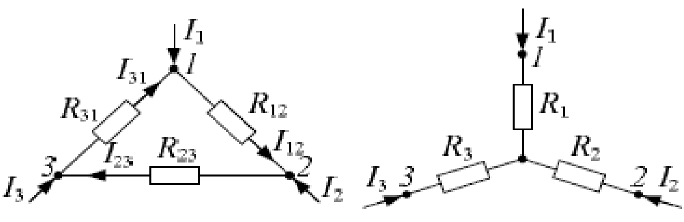
Замена одного из треугольников звездой, как показано на рисунке 4.8, *б*, позволяет получить схему со смешанным соединением приемников. Резисторы R_2 и R_{24}, а также R_3 и R_{23} соединены последовательно и их можно заменить эквивалентными, которые в свою очередь соединены параллельно. В итоге схема преобразуется в простейшую (рис. 4.8, *в*).



а *б* *в*

Рис. 4.8. Упрощение схемы преобразованием соединения треугольником в соединение звездой

Рассмотрим фрагмент схемы (рис. 4.9, *а*), в которой между узлами *1*, *2*, *3* включены три сопротивления R_{23}, R_{31}, R_{12}, соединенные треугольником, а на рисунке 4.9, *б* между этими же узлами включены три сопротивления R_1, R_2, R_3, соединенные звездой, и выведем уравнения преобразования этих схем.



а *б*

Рис. 4.9. Схемы соединения приемников:
а – треугольником; *б* – звездой

Соединения треугольником и звездой, изображенные на рисунке 4.9, эквивалентны друг другу при условии, что внешние напряжения U_{12}, U_{23}, U_{31} (между точками *1*, *2*, *3*) и токи I_1, I_2, I_3, подходящие к этим точкам, одинаковы в обоих случаях.

По второму закону Кирхгофа сумма напряжений в контуре треугольника равна нулю:

$$I_{12}R_{12} + I_{23}R_{23} + I_{31}R_{31} = 0. \tag{4.20}$$

По первому закону Кирхгофа для узлов *2* и *1* выразим токи:

$$I_{23} = I_{12} + I_2; \;\; I_{31} = I_{12} - I_1$$

и, подставив в выражение (4.20), определим ток

$$I_{12} = \frac{I_1R_{31} - I_2R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Напряжение между узлами *1* и *2* треугольника (рис. 4.9, *а*)

$$U_{12} = I_{12}R_{12} = \frac{I_1R_{12}R_{31} - I_2R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Такое же напряжение в схеме, приведенной на рисунке 4.9, *б*:

$$U_{12} = I_1R_1 - I_2R_2.$$

Для выполнения условия эквивалентности необходимо равенство напряжений U_{12} в обеих схемах при любых токах I_1 и I_2, т. е.

$$I_1\frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} - I_2\frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = I_1R_1 - I_2R_2. \tag{4.21}$$

Равенство (4.21) должно выполняться, если равны коэффициенты при токах I_1 и I_2. Значит, получаем уравнения для определения сопротивлений искомой эквивалентной звезды через заданные сопротивления треугольника:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \tag{4.22}$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \tag{4.23}$$

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \qquad (4.24)$$

Выражение (4.24) получается по аналогии с предыдущими в результате круговой замены индексов.

Таким образом, *сопротивление луча звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений трех сторон треугольника.*

Численный пример решения задачи по рисунку 4.8

E = 660 В; R_{12} = 30 Ом; R_{23} = 50 Ом; R_{31} = 20 Ом; R_{24} = 20 Ом; R_{43} = 5 Ом.

Преобразуем верхний треугольник сопротивлений в звезду

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{30 \cdot 20}{30 + 50 + 20} = 6 \text{ Ом}.$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{30 \cdot 50}{30 + 50 + 20} = 15 \text{ Ом}.$$

$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{50 \cdot 20}{30 + 50 + 20} = 10 \text{ Ом}.$$

Получаем схему среднего рисунка 4.8 *б*.

Определяем эквивалентное сопротивление

$$R_Э = R_1 + \frac{(R_2 + R_{24}) \cdot (R_3 + R_{43})}{R_2 + R_{24} + R_3 + R_{43}} = 6 + \frac{(15 + 20) \cdot (10 + 5)}{15 + 20 + 10 + 5} = 16{,}5 \text{ Ом}.$$

Получаем схему правого рисунка 4.8 *в*.

Определяем ток источника $I = E / R_Э$ = 660 / 16,5 = 40 А.

Токи в нижних резисторах определяем по формулам разброса

$$I_{43} = I \frac{R_2 + R_{24}}{R_2 + R_{24} + R_3 + R_{43}} = 40 \frac{15 + 20}{15 + 20 + 10 + 5} = 28$$

А

$$I_{24} = I \cdot \frac{R_3 + R_{43}}{R_2 + R_{24} + R_3 + R_{43}} = 40 \frac{10 + 5}{15 + 20 + 10 + 5} = 12 \text{А}$$

Возвращаемся к исходной схеме рисунка 4.8 *а*. Находим напряжение на верхнем резисторе R_{31} используя второй закон Кирхгофа $U_{31} = E - I_{43} \cdot R_{43}$ и ток, используя закон Ома

$$I_{31} = \frac{U_{31}}{R_{31}} = \frac{E - I_{43} \cdot R_{43}}{R_{31}} = \frac{660 - 28 \cdot 5}{20} = 26\text{A}$$

Аналогично

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{E - I_{24} \cdot R_{24}}{R_{12}} = \frac{660 - 12 \cdot 20}{30} = 14\text{A}.$$

Находим ток в среднем резисторе I_{23} = I_{31} – I_{43} = 26 – 28 = – 2 А.

Знак «–» показывает что ток в среднем резисторе течёт справа налево.