

20 Метод уравнений Кирхгофа

Метод уравнений Кирхгофа является универсальным, т. е. пригодным для задач анализа любой электрической цепи. Положим, в схеме, содержащей B ветвей и Y узлов, заданными являются источники ЭДС и сопротивления приемников, а искомыми – токи в ветвях. Следовательно, число неизвестных равно числу ветвей, и для нахождения токов необходимо иметь систему уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа.

По первому закону Кирхгофа, выражающему равенство нулю алгебраической суммы токов в узле, можно записать $Y - 1$ независимых уравнений.

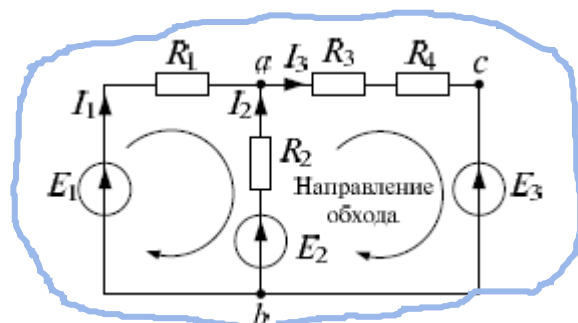
По второму закону Кирхгофа, выражающему равенство алгебраической суммы ЭДС в контуре алгебраической сумме падений напряжений в нем, нужно записать $B - Y + 1$ независимых уравнений.

Система, состоящая из взаимно независимых $Y - 1$ уравнений по первому закону Кирхгофа и $B - Y + 1$ уравнений по второму закону Кирхгофа, в сумме дает необходимое и достаточное число уравнений для определения токов во всех ветвях.

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа следует обращать внимание на то, чтобы составленные уравнения были взаимно независимыми. Контур выбирают так, чтобы в них вошли все ветви схемы, а в каждом из контуров – возможно меньшее число ветвей. Контур взаимно независим, если каждый последующий контур, для которого составляется уравнение, имеет не меньше одной новой ветви.

При составлении уравнений рекомендуется придерживаться следующей последовательности: сначала выбрать произвольные положительные направления токов во всех ветвях электрической цепи, затем составить уравнения для узлов на основании первого закона Кирхгофа и уравнения для контуров на основании второго закона Кирхгофа. При этом ток источника тока учитывается только при записи уравнений по первому закону Кирхгофа.

В качестве примера запишем систему уравнений по законам Кирхгофа для цепи, схема которой представлена на рисунке 4.1. Схема цепи содержит два узла, поэтому по первому закону Кирхгофа необходимо составить одно уравнение. В схеме рисунка 4.1

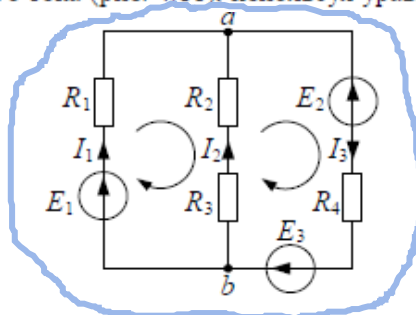


три ветви, следовательно, число неизвестных токов и число необходимых уравнений равно трем. Недостающие два уравнения необходимо составить по второму закону Кирхгофа. В итоге система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2; \\ I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) = E_2 - E_3. \end{cases}$$

Подставив в систему уравнений заданные величины ЭДС и сопротивлений и решив ее известными в алгебре методами, получим значения токов в ветвях I_1 , I_2 , I_3 . Результаты расчетов проверяем по балансу мощностей.

Пример 4.2. Дано: $E_1 = 100$ В; $E_2 = 20$ В; $E_3 = 60$ В; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $R_3 = 40$ Ом; $R_4 = 20$ Ом. Определить токи в ветвях электрической цепи постоянного тока (рис. 4.11), используя уравнения Кирхгофа.



Ри. 4.11

Решение. Цепь содержит три ветви с неизвестными токами и два узла. Для определения токов составим одно уравнение по первому закону Кирхгофа и два уравнения – по второму закону Кирхгофа. Задаем положительные направления токов в ветвях и направление обхода контуров, обозначаем их на схеме цепи.

Составляем уравнение по первому закону Кирхгофа для узла a :

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 &= E_1; \\ (R_2 + R_3) I_2 + R_4 I_3 &= E_3 - E_2. \end{aligned}$$

Подставляем числовые значения и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ 10I_1 - 60I_2 = 100; \\ 60I_2 + 20I_3 = 40. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения системы

$$I_1 = \frac{100 + 60I_2}{10} = 10 + 6 \cdot I_2.$$

Выразим из третьего уравнения системы

$$I_3 = \frac{40 - 60I_2}{20} = 2 - 3 \cdot I_2.$$

Подставим выражения токов I_1 и I_3 в первое уравнение системы:

$$10 + 6I_2 + I_2 - 2 + 3I_2 = 0;$$

$$10I_2 = -8; \quad I_2 = -0,8 \text{ A}.$$

$$\text{Находим: } I_1 = 10 - 6 \cdot 0,8 = 5,2 \text{ A}; \quad I_3 = 2 + 3 \cdot 0,8 = 4,4 \text{ A}.$$

Проверим по балансу мощностей:

мощность источников ЭДС

$$\begin{aligned} P_{\text{и}} &= E_1 I_1 + E_3 I_3 - E_2 I_3 = \\ &= 100 \cdot 5,2 + 60 \cdot 4,4 - 20 \cdot 4,4 = 520 + 264 - 88 = 696 \text{ Вт}; \end{aligned}$$

мощность потребителей

$$\begin{aligned} P_{\text{потр}} &= I_1^2 R_1 + I_2^2 (R_2 + R_3) + I_3^2 R_4; \\ P_{\text{потр}} &= 5,2^2 \cdot 10 + 0,8^2 \cdot 60 + 4,4^2 \cdot 20 = 270,4 + 38,4 + 387,4 = 696 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

$$P_{\text{и}} = P_{\text{потр}}.$$

Расчет токов выполнен правильно.