71 Способы представления синусоидальных величин

Известно несколько способов представления синусоидально изменяющихся величин: в виде тригонометрических функций (8.1), графиков изменений во времени (см. рис. 8.1), вращающихся векторов, в виде комплексных чисел.

Тригонометрическая форма представления синусоидальных величин, равно как и в виде графических зависимостей, практически применима только для простейших электрических цепей, не содержащих большого числа контуров, источников, взаимных индуктивностей и т. п. Это ограничение связано с трудоемкостью выполнения математических действий с синусоидальными величинами токов, напряжений, ЭДС.

Для упрощения расчетов цепей переменного тока вводится условное изображение синусоидальных функций векторами.

Пусть длина вектора $\overline{I}_m$ равна амплитуде тока $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Начало вектора $\overline{I}_m$ поместим в начало прямоугольной системы координат, вектор расположим под углом ψ_i (рис. 8.5) к горизонтальной оси.

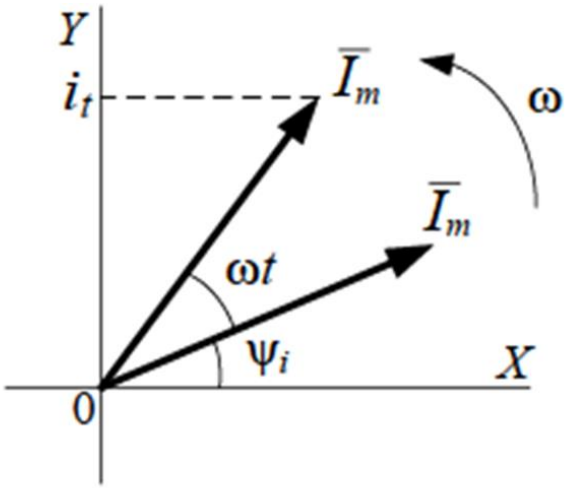

Рис. 8.5. Изображение синусоидальной функции тока *i* вращающимся вектором

Отметим, что положительные углы откладываются против часовой стрелки, отрицательные – по часовой стрелке.

Представим, что вектор $\overline{I}_m$ с момента времени $t = 0$ начинает вращаться вокруг начала системы координат против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью, равной угловой частоте ω. Проекция конца вектора на ось ординат совершает синусоидальные колебания, и каждое мгновенное значение тока, соответствующее моменту времени t, можно рассматривать как проекцию на ось ординат вектора $\overline{I}_m$, повернувшегося на фазовый угол ωt относительно оси абсцисс (рис. 8.5).

Следовательно, величину, изменяющуюся во времени по синусоидальному закону, можно изобразить вращающимся вектором.

Совокупность векторов, изображающих синусоидальные ЭДС, напряжения, токи одной и той же частоты, называют *векторной диаграммой*.

Поскольку все синусоидальные величины одной и той же частоты, угловая скорость всех векторов одинакова и взаимное расположение векторов в любой момент времени остается неизменным, поэтому все векторы векторной диаграммы изображают, как правило, для момента времени $t = 0$, тогда начальное положение векторов на координатной площади определяется начальными фазами.

Применение векторных диаграмм позволяет просто и наглядно вести расчеты электрических цепей. Например, сложение или вычитание мгновенных значений синусоидальных величин можно заменить сложением или вычитанием векторов, их изображающих.

Пример 8.3. Определить ток $i_3 = i_1 + i_2$ по условию примера 8.2 с помощью векторной диаграммы.

Решение. Выбираем масштаб тока и откладываем векторы на координатной плоскости с учетом начальных фаз (рис. 8.6).

Просуммировав векторы тока $\overline{I}_{m_1}$ и $\overline{I}_{m_2}$, получили суммарный вектор $\overline{I}_{m_3}$, длина которого в масштабе равна 58 А, начальная фаза $\psi_{i_3} = 46°$:

$\boldsymbol{i_1} = 20 \sin (\omega t + 30^o)$ A; $\boldsymbol{i_2} = 40 \sin (\omega t + 60^o)$ A;

$$i_3 = 58 \sin (t\omega + 46°) \text{ A.}$$

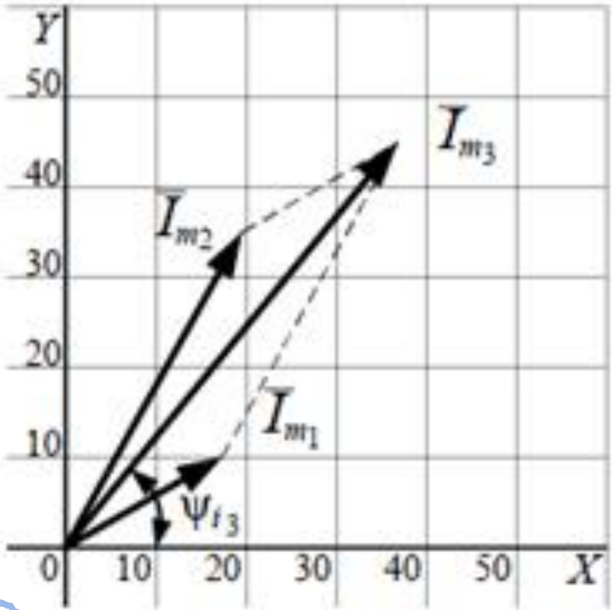

Рис. 8.6. Сложение векторов, изображающих синусоидальные токи i_1, i_2

Применение векторных диаграмм упрощает расчет электрических цепей переменного тока, но требует выполнения определенной графической работы и не дает достаточной точности результата.

Есть возможность объединить простоту векторных диаграмм с возможностью вести расчет электрических цепей синусоидального напряжения с любой точностью. Эта возможность реализуется с помощью представления синусоидальных величин комплексными числами.

Вектор тока, изображающий синусоидальный ток $i = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$, можно расположить на комплексной плоскости (рис. 8.7), где горизонтальную ось называют *осью вещественных чисел*, а вертикальную – *осью мнимых чисел*; $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

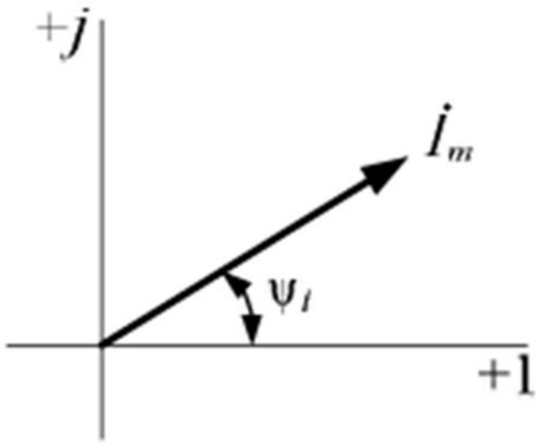

Рис. 8.7. Вектор тока на комплексной плоскости

Вектор I_m называют *комплексной амплитудой тока*.

Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует комплексное число, которое может быть записано в различных формах: показательной, тригонометрической, алгебраической, полярной.

В показательной форме комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}.$$

В полярной форме комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = I_m \angle \psi_i,$$

где I_m – амплитуда тока или модуль комплексного числа;

ψ_i – начальная фаза тока или аргумент комплексного числа;

e – основание натурального логарифма;

$j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Величину $e^{j\psi_i}$ называют *оператором поворота*. Умножение комплексной амплитуды $\dot{I}_m$ на $e^{j\psi_i}$ или на $e^{j\omega t}$ означает поворот вектора $\dot{I}_m$ на угол ψ_i или ωt в положительном направлении.

Переход к *тригонометрической форме* записи комплексного числа осуществляют с помощью формулы Эйлера:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = I_m(\cos\psi_i + j\sin\psi_i).$$

Вычислив значения $\cos\psi_i$ и $\sin\psi_i$, получим *алгебраическую форму* комплексного числа:

$$\dot{I}_m = I_m(\cos\psi_i + j\sin\psi_i) = a + jb,$$

где $a = I_m\cos\psi_i$ – действительная часть комплексного числа или проекция вектора $\dot{I}_m$ на ось вещественных чисел;

$b = I_m\sin\psi_i$ – коэффициент при мнимой части комплексного числа или проекция вектора $\dot{I}_m$ на ось мнимых чисел.

Переход от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной осуществляют в такой последовательности: если дана комплексная амплитуда тока в виде $\dot{I}_m = a + jb$, определяют модуль числа $I_m = \sqrt{a^2 + b^2}$ и аргумент $\psi_i = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$. Значит, в показательной форме получим $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$.

Замечание. Обычно при расчетах пользуются действующими значениями. Комплекс действующего значения электрической величины получают путем деления комплексной амплитуды на $\sqrt{2}$. Комплексы действующих значений кратко называют комплексом величины, например комплекс тока.

Буквенные обозначения синусоидально изменяющихся величин приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1

Буквенные обозначения синусоидально изменяющихся величин

Обозначение	Название
i, u, e	Мгновенные значения (соответственно тока, напряжения, ЭДС)
I_m, U_m, E_m	Амплитудные значения
I, U, E	Действующие значения
$\dot{I}_m$, $\dot{U}_m$, $\dot{E}_m$	Комплексные амплитуды
$\dot{I}$, $\dot{U}$, $\dot{E}$	Комплексные действующие значения

В последнее время вместо точки над буквой, обозначающей синусоидальную величину, её подчёркивают.

$\underline{I}$, $\underline{U}$, $\underline{E}$ – комплексные действующие значения, более современная запись