

127 Разложение несинусоидальной кривой в ряд Фурье

Несинусоидальная функция может быть представлена как сумма синусоид кратной частоты, которые имеют свои амплитуды и начальные фазы. Они называются гармониками.

Как известно, любая периодическая функция $f(\omega t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, т. е. имеющая на каждом конечном интервале конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье. Периодические несинусоидальные ЭДС, напряжения и токи в реальных электрических цепях удовлетворяют условиям Дирихле. Поэтому, например, для периодической несинусоидальной ЭДС можно записать

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \\ \dots + E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k). \quad (16.1)$$

Первый член ряда E_0 называется постоянной составляющей ЭДС или нулевой гармоникой, второй член $E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ – основной синусоидой или первой гармоникой, а все остальные члены ряда вида $E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ при $k > 1$ носят название высших гармоник.

В выражении (16.1) k – номер гармоники. Он показывает, во сколько раз частота k -гармоники больше основной частоты. Основная угловая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T – период несинусоидальной периодической ЭДС.

В общем случае ряд Фурье содержит бесконечное число членов, но, как правило, можно ограничиться некоторым конечным числом членов ряда. Для вычисления коэффициентов ряда Фурье целесообразно его члены представить через синусоиды и косинусоиды без начальных фаз. Тогда для любой k -й гармоники имеем

$$\underbrace{E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)} = E_{km} \cos \psi_k \sin k\omega t + E_{km} \sin \psi_k \cos k\omega t = \\ = \underbrace{B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t.}$$

Таким образом,

$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos k\omega t. \quad (16.2)$$

Постоянная составляющая E_0 и коэффициенты B_{km} и C_{km} , как известно из курса математики, определяются при помощи следующих формул:

$$\underbrace{E_0 = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt; \quad B_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \sin k\omega t dt; \quad C_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \cos k\omega t dt.} \quad (16.3)$$

Имея B_{km} и C_{km} , нетрудно вычислить амплитуду и начальную фазу k -гармоники:

$$\underbrace{E_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}; \quad \psi_k = \operatorname{arctg} \frac{C_{km}}{B_{km}}.} \quad (16.4)$$

Аналогично можно разложить в ряд Фурье несинусоидальные токи и напряжения. Разложение в ряд Фурье встречающихся в электротехнике периодических кривых геометрически правильной формы приведено в справочных таблицах. Если справочные данные отсутствуют или требуются аналитические решения, можно воспользоваться выражениями (16.1)–(16.4). Однако на практике часто бывает достаточно получить численные значения коэффициентов ряда. Это позволяют сделать современные компьютерные средства обработки данных по значениям функции, заданной табличным способом, т. е. рядом абсцисс и ординат точек.

При проверке полученных результатов разложения в ряд, а также для предварительного исключения из расчетов и анализа коэффициентов, отсутствующих в разложении, полезно отметить некоторые связи между характером периодической функции и ее частотным спектром. То есть в зависимости от угловой частоты некоторые гармоники могут быть равными нулю или отсутствовать.

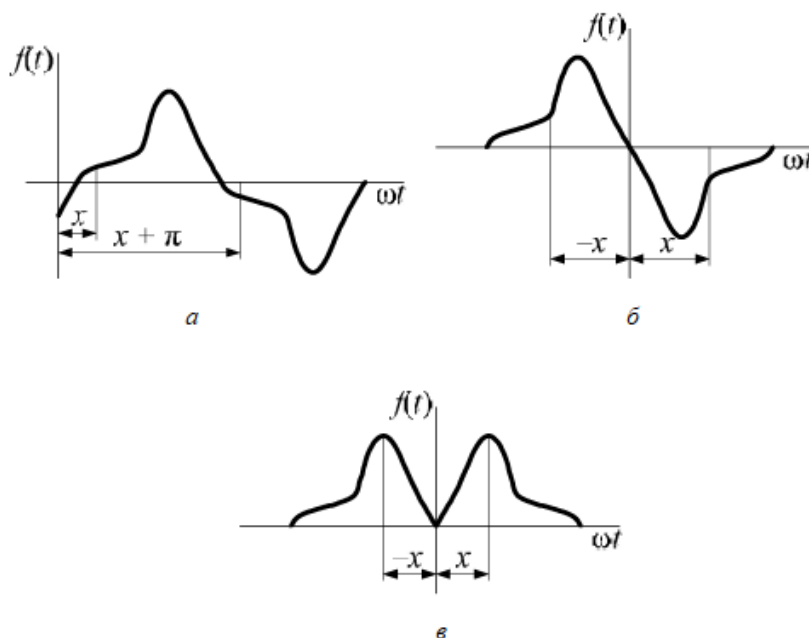


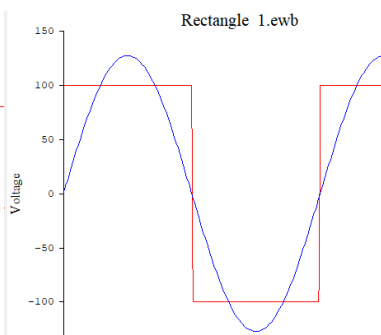
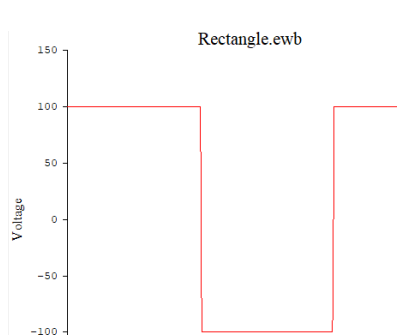
Рис. 16.1. Виды кривых периодических функций

Так, для кривых (рис. 16.1, а), симметричных относительно оси абсцисс, в спектре ряда Фурье будут отсутствовать нулевая и все четные гармоники. Значительное число функций, с которыми приходится иметь дело в электротехнике, являются симметричными относительно оси абсцисс. Следовательно, они не содержат четных гармоник и постоянной составляющей.

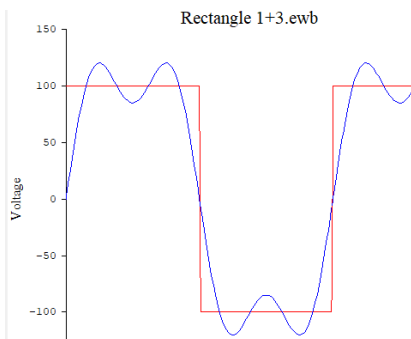
Кривые (рис. 16.1, б), симметричные относительно начала координат, не содержат постоянной составляющей, и все косинусные составляющие у этих функций равны нулю.

Если аналогичные выкладки проделать для приведенной на рисунке 16.1, в кривой, симметричной относительно оси ординат, то в ее разложении в ряд Фурье будут отсутствовать все синусные составляющие.

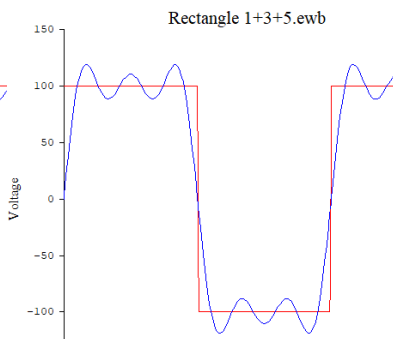
Разложение прямоугольника в ряд Фурье



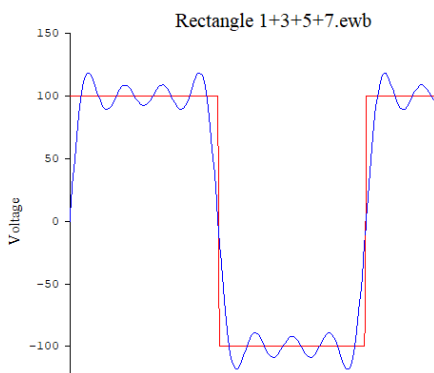
Первая и третья гармоники



Первая, третья и пятая



Семь гармоник



Девять гармоник

